MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN VỀ TÍNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

ThS. Võ Xuân Mai
Khoa Sư phạm Toán-Tin, Trường Đại học Đồng Tháp
Email: vxmai@dthu.edu.vn

Tóm tắt. *Các bài toán về tính góc giữa hai mặt phẳng thường ít được đề cập đến trong các tài liệu tham khảo về bài tập hình học không gian, một số tài liệu có trình bày đến phương pháp giải dạng toán này nhưng chưa đầy đủ, chưa có hệ thống hoặc các ví dụ minh họa chưa đủ sức thuyết phục. Hơn nữa, đây là dạng toán khó đối với học sinh, đòi hỏi người học phải có khả năng tư duy, có trí tưởng tượng trong không gian và vận dụng linh hoạt quan hệ vuông góc để tìm ra cách dựng xác định được góc trong từng trường hợp cụ thể. Trong bài viết này, chúng tôi cố gắng hệ thống phương pháp giải bài toán tính góc giữa hai mặt phẳng cùng với các ví dụ minh họa nhằm trang bị cho học sinh một số công cụ giải quyết khi đối mặt với bài toán này cũng như góp phần phát triển tư duy cho học sinh.*

I. Nội dung

1. Một số khái niệm góc trong không gian

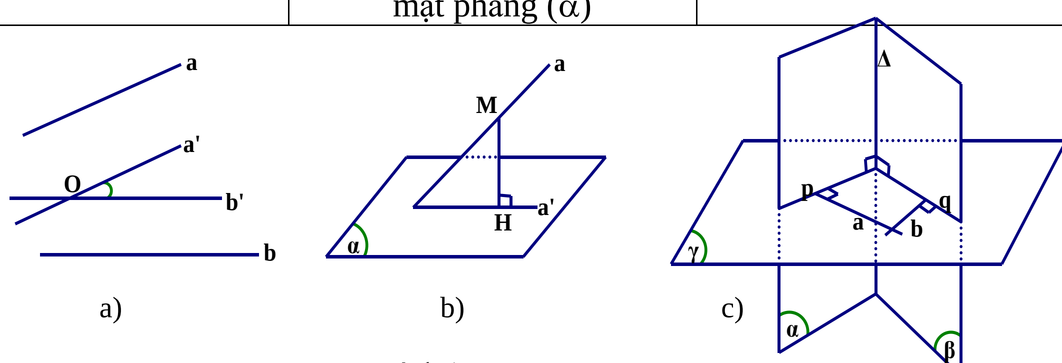
Góc giữa hai đường thẳng a và b là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song hoặc trùng với a và b.

Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) là góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu a' của nó lên mặt phẳng (α).

Góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là góc giữa hai đường thẳng a và b lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Ta có thể tóm tắt qua bảng và minh họa như hình 1

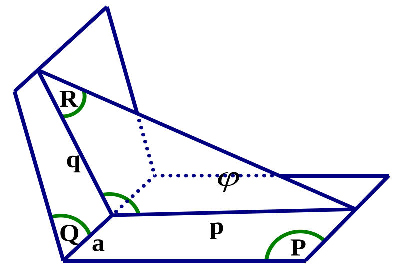
Góc giữa hai đường thẳng	Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng	Góc giữa hai mặt phẳng
Góc (a, b) = góc (a', b') với a' // a, b' // b	Góc (a, α) = góc (a, a') với a' hình chiếu của a lên mặt phẳng (α)	Góc (α, β) = góc (a, b) với $a \perp (\alpha)$, $b \perp (\beta)$



Hình 1

Góc nhị diện: Cho hai mặt phẳng (α), (β) cắt nhau theo giao tuyến a. Đường thẳng a chia mỗi mặt phẳng (α), (β) thành hai nửa mặt phẳng. Gọi (P) và (Q) là hai nửa mặt phẳng tương ứng thuộc (α), (β). Hình tạo bởi hai nửa mặt phẳng (P) và (Q) được gọi là góc nhị diện, các nửa mặt phẳng được gọi là các mặt của góc nhị diện, đường thẳng a gọi là cạnh của góc nhị diện.

Một mặt phẳng (R) vuông góc với đường thẳng a cắt (P), (Q) theo giao tuyến p, q. Góc tạo bởi hai nửa đường thẳng p, q được gọi là góc phẳng của góc nhị diện (Hình 2).



Hình 2

Tất cả góc phẳng của góc nhị diện đều bằng nhau, số đo của góc phẳng nhị diện gọi là số đo của góc nhị diện. Vậy $0 \le \varphi \le \pi$.

2. Phương pháp giải và ví dụ minh họa

2.1. Sử dụng công cụ hình học thuần túy

Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β): quy về xác định góc phẳng của góc nhị diện tương ứng, với chú ý rằng góc giữa hai mặt phẳng là góc nhọn.

Khi hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến Δ, xét một mặt phẳng (γ) ⊥ Δ, lần lượt cắt (α) và (β) theo giao tuyến p và q. Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) bằng góc giữa hai đường thẳng p và q (Hình 1c).

Vậy góc (α, β) = góc (a, b) = góc (p, q) với a ⊥ (α), b ⊥ (β) ; với Δ = (α) ∩ (β), (γ) ⊥ Δ, (α) ∩ (γ) = p, (β) ∩ (γ) = q.

Ngoài ra, ta có thể xác định theo cách dựng: (Bạn đọc tự vẽ hình minh họa)

- Tìm giao tuyến $a = (\alpha) \cap (\beta)$.

- Dựng đoạn $AB,\ A \in (\alpha),\ B \in (\beta),\ AB \perp (\beta)$.

- Kẻ $AH \perp a\ \Rightarrow AHB$ là góc giữa hai mặt phẳng cần tìm.

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC), SA = a\sqrt{3}$. Tính số đo góc giữa hai mặt phẳng $(SAB),(SBC)$.

Giải: Gọi H, K lần lượt là trực tâm của $\Delta ABC,\ \Delta SBC$. Ta chứng minh được

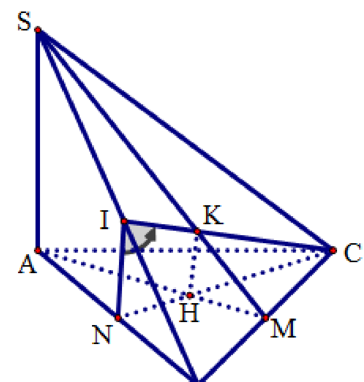
$HK \perp SB \Rightarrow SB \perp (CIN)$. Vậy góc giữa $(SAB),(SBC)$ là góc CIN (Hình 3). Ta có

$$NI=\frac{SA.BN}{SB}=\frac{a\sqrt{3}}{4},\ BI=\frac{BM.BC}{SB}=\frac{a}{4},$$

$$CN=\frac{a\sqrt{3}}{2}, CI=\sqrt{BC^2-BI^2}=\frac{a\sqrt{15}}{4}.$$

Áp dụng định lí côsin trong tam giác CIN ta có:

$$\cos CIN=\frac{CI^2+NI^2-CN^2}{2CI.NI}=\frac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow \alpha\approx 63^0 26'.$$



Hình 3

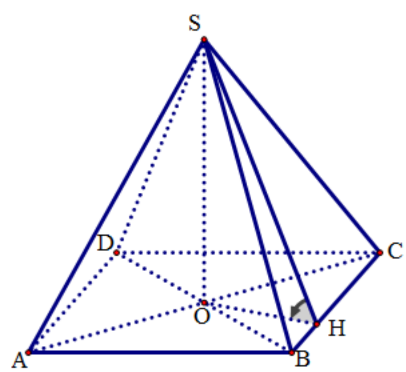
Ví dụ 2. ([2], tr.119) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a tâm O $SO\perp(ABCD)$, $SO=\frac{a\sqrt{6}}{3}$, $OB=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính số đo góc tạo bởi hai mặt phẳng $(ABC),(SBC)$.

Giải: Kẻ $OH\perp BC\Rightarrow SH\perp BC$ nên SHO là góc phẳng của góc nhị diện $(ABC),(SBC)$ (Hình 4). Ta có

$$OA=OC=\sqrt{BC^2-OB^2}=\frac{a\sqrt{6}}{3},$$

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}\Rightarrow OH=\frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Trong tam giác vuông SHO ta có

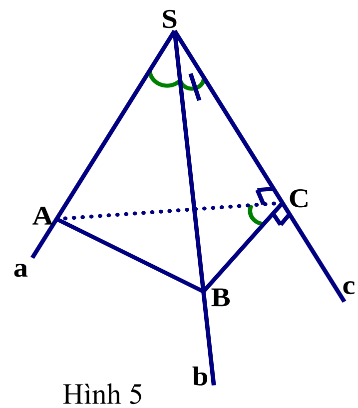


Hình 4

$$\tan SHO=\frac{SO}{OH}=\sqrt{3}\Rightarrow SHO=60^0.$$

2.2. Sử dụng định lí Côsin, định lí Sin trong góc tam diện

Trước hết đề cập đến khái niệm góc tam diện, theo ([3], tr.82): Giả sử a, b, c là ba nửa đường thẳng không cùng nằm trong cùng một mặt phẳng xuất phát từ một điểm S. Các nửa đường thẳng tạo thành ba góc $(a,b);(b,c);(c,a)$. Hình tạo bởi ba góc $(a,b);(b,c);(c,a)$ được gọi là góc tam diện (Hình 5). Điểm S được gọi là đỉnh của góc tam diện, ba nửa đường thẳng a, b, c gọi là các cạnh của góc tam diện, các góc $(a,b);(b,c);(c,a)$ được gọi là góc phẳng của góc tam diện. Các nửa mặt phẳng của hai mặt phẳng tạo bởi $(a,b);(c,a)$ thành một góc nhị diện. Góc nhị diện này được gọi là góc nhị diện của góc tam diện, có cạnh a, đối diện với góc phẳng (b,c).



Hình 5

Định lí Côsin: Nếu α, β, γ là các góc phẳng của một góc tam diện và C là góc nhị diện đối diện với góc phẳng α thì $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos C$.

Định lí Sin: Nếu α, β, γ là các góc phẳng của một góc tam diện và A, B, C là góc nhị diện đối diện với góc phẳng của chúng thì

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}.$$

Xem chứng minh hai định lí ([3], tr.83 – 85).

Trở lại ví dụ 1 và ví dụ 2, vận dụng định lí côsin và định lí sin trong góc tam diện, ta có thể giải bài toán như sau:

Ví dụ 1. (Hình 3) ΔSAB có $\cos ASB = \cos ASC = \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \sin ASB = \dfrac{1}{2}$.

ΔSBC có $\cos CSB = \dfrac{SB^2 + SC^2 - BC^2}{2SB.SC} = \dfrac{7}{8}; \sin CSB = \dfrac{\sqrt{15}}{8}$.

Định lý côsin trong góc tam diện $S.ABC$ ta có

$\cos ASC = \cos ASB \cos BSC + \sin ASB \sin BSC \cos\alpha$, với α là góc giữa hai mặt phẳng $(SAB),(SBC)$. Suy ra $cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha \approx 63^0 26'$.

Ví dụ 2. (Hình 4) Ta chứng minh được $(SBC)\perp(SCD)$ nên góc $((SBC),(SAC))=45^0$. ΔSBO có $\sin BCA=\sin BCO=\dfrac{OB}{BC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Định lý sin trong góc tam diện $C.SAB$ ta có $\dfrac{\sin\alpha}{\sin ACS}=\dfrac{\sin 45^0}{\sin BCA}$ với α là góc giữa hai mặt phẳng $(ABC),(SBC)$. Suy ra $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\alpha=60^0$.

2.3. Sử dụng công cụ tọa độ

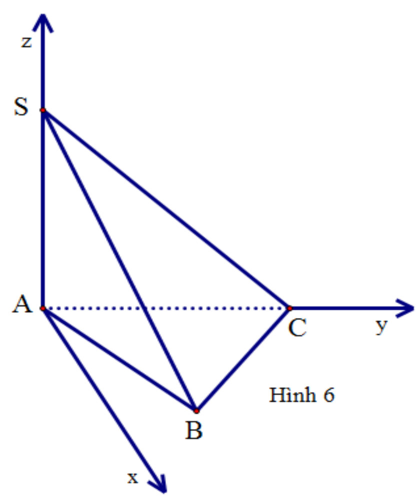
Chọn hệ trục tọa độ không gian thích hợp. Cần xác định góc giữa hai mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến (VTPT) $\overrightarrow{n_1}=(a_1;b_1;c_1)$ và (β) có VTPT $\overrightarrow{n_2}=(a_2;b_2;c_2)$. Khi đó

góc $(\alpha,\beta)=(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})$ nếu $0\le(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})\le\dfrac{\pi}{2}$ hoặc góc $(\alpha,\beta)=\pi-(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})$ nếu $\dfrac{\pi}{2}<(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})<\pi$.

Với $\cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})=\dfrac{\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$.

Hay

$$\cos(\alpha,\beta)=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{\left|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\right|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$



Hình 6

Lại lấy ví dụ 1 ở trên, ta chọn hệ trục tọa độ không gian $Oxyz$ như hình 6. Ta có

$$A(0;0;0), B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0\right), C(0;a;0), S(0;0;a\sqrt{3})$$

Mặt phẳng (SAB) có cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AB}$ nên có VTPT $\overrightarrow{n_1}=(-1;\sqrt{3};0)$.

Mặt phẳng (SBC) có cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{CS},\overrightarrow{CB}$ nên có VTPT $\overrightarrow{n_2}=(1;\sqrt{3};1)$.

$$\cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})=\frac{\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow((SAB),(SBC))=63^0 26'.$$

Ví dụ 2. Chọn hệ trục tọa độ không gian $Oxyz$ như sau

$$O(0;0;0),B\left(\frac{a\sqrt{3}}{3};0;0\right),C\left(0;\frac{a\sqrt{6}}{3};0\right),S\left(0;0;\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)$$

Mặt phẳng (ABC) có phương trình $z=0$, VTPT $\overrightarrow{n_1}=(0;0;1)$.

Mặt phẳng (SBC) có phương trình $\dfrac{x}{a\sqrt{3}/3}+\dfrac{y}{a\sqrt{6}/3}+\dfrac{z}{a\sqrt{6}/3}=0\Leftrightarrow\sqrt{2}x+y+z=0$,

VTPT $\overrightarrow{n_2}=(\sqrt{2};1;1)$. Từ đó ta có $\cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})=\dfrac{\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow((ABC),(SBC))=60^0.$

2.4. Sử dụng công cụ vectơ

Cần xác định góc giữa hai mặt phẳng (α) có VTPT $\overrightarrow{n_1}$ và (β) có VTPT $\overrightarrow{n_2}$. Khi đó

$\cos(\alpha,\beta)=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$, ta biến đổi trên tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{n_1}$ và $\overrightarrow{n_2}$.

Ví dụ 1. (Hình 3) Ta có $HK\perp(SBC),CH\perp(SAB)$ nên

$$\cos((\mathrm{SAB}),(\mathrm{SBC}))=\frac{\left|\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{CH}\right|}{\left|\overrightarrow{HK}\right|.\left|\overrightarrow{CH}\right|}.$$

Ta có $BI=\dfrac{a}{4},SI=\dfrac{7a}{4}$, $SM^2=\dfrac{SB^2+SC^2}{2}-\dfrac{BC^2}{4}=\dfrac{15a^2}{4}$

$\Rightarrow SM=\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$, $SK=\dfrac{SI.SB}{SM}=\dfrac{7a\sqrt{15}}{15}$.

Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b},\overrightarrow{SA}=\vec{c}$, với $\vec{a}.\vec{b}=AB.AC\cos 60^0=\dfrac{a^2}{2},\vec{a}.\vec{c}=\vec{b}.\vec{c}=0$.

Ta có $\overrightarrow{CH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CN}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$.

$$\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{SK}-\overrightarrow{SC}=\frac{SK}{SM}\overrightarrow{SM}-(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AC})=\frac{SK}{SM}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AM})-(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AC})$$
$$=\frac{7}{15}\vec{a}-\frac{8}{15}\vec{b}-\frac{1}{15}\vec{c}.$$

Từ đó ta có $\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{CH}=\left(\overrightarrow{CK}-\overrightarrow{CH}\right).\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{CK}.\overrightarrow{CH}-\overrightarrow{CH}^2=-\frac{a^2}{15}$,

$HK=\frac{SA.HM}{SM}=\frac{a\sqrt{15}}{10}, CH=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Thay vào công thức (*) ta được

$$\cos((\mathrm{SAB}),(\mathrm{SBC}))=\frac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow((SAB),(SBC))\approx 63^0 26'.$$

Nhận xét: Đối với phương pháp hình học thuần túy, ta cần phải xác định góc giữa hai mặt phẳng sau đó qua thao tác tính toán tìm ra được số đo của chúng, trong khi đó, đối với cách giải sử dụng định lí côsin và định lí sin ta chỉ cần vận dụng vào góc tam diện thích hợp chứa hai mặt phẳng cần tìm số đo góc giữa chúng mà không cần xác định góc; điều này tương tự đối với phương pháp tọa độ khi chọn hệ trục tọa độ không gian thích hợp. Hai phương pháp này thường cho ta lời giải ngắn gọn và tối ưu hơn; còn đối với phương pháp vectơ, dù vẫn không cần xác định góc giữa hai mặt phẳng tuy nhiên việc biến đổi trên vectơ không phải là việc dễ dàng cho học sinh.

II. Một số bài tập đề nghị

BT1. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân với BA = BC = a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và SA = a. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC.

a) Tính số đo của nhị diện (SAC) và (SBC).

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC).

BT2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a và SA vuông góc mặt phẳng (ABCD), SA = x. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) tạo với nhau một góc 60^0.

BT3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính AB = 2a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SA = a\sqrt{3}$.

a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC).

BT4. Cho tứ diện ABCD có ABC là tam giác vuông cân với AB = AC = a ; DBC là tam giác đều, góc nhị diện cạnh BC có số đo bằng 30^0. Tính số đo của góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (CBD), (ABD) và (ACD).

BT5. Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SA = a\sqrt{2}$, đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D với AB = 2a, AD = DC = a.

a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC).

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC).

BT6. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Từ trung điểm H của cạnh AB dựng SH vuông góc mặt phẳng (ABCD) sao cho nhị diện cạnh AD của hình chóp S.ABCD có số đo bằng 60^0. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD).

BT7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc mặt phẳng đáy. Hai điểm M và N lần lượt thay đổi trên cạnh CB và CD, đặt CM = x, CN = y. Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y để :

a) Hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) tạo với nhau góc 45^0.

b) Hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) vuông góc với nhau.

III. Kết luận

Bài viết đã hệ thống một số phương pháp giải bài toán về tính góc giữa hai mặt phẳng, cũng như làm sáng rõ ví dụ minh họa cho mỗi phương pháp. Hi vọng với các phương pháp giải này, học sinh có thể khắc phục được những khó khăn đã nêu trên đối với bài toán tính góc giữa hai mặt phẳng trong hình học không gian bằng cách sử dụng công cụ vectơ, tọa độ hay định lí côsin, sin trong góc tam diện một cách hiệu quả và ngắn gọn hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Đ. Quỳnh, V. N. Cương (2009), *Hình học 11*, NXB Giáo dục.
2. T. T. Minh (2000), *Giải toán Hình học 11*, NXB Giáo dục.

3. Đ. Tam (2004), *Giáo trình Hình học sơ cấp*, NXB Đại học Sư phạm.
4. N. M. Hy (2002), *Các bài toán về phương pháp vectơ và phương pháp tọa độ*, NXB Giáo dục.