XÂY DỰNG MỘT SỐ LỚP BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG HÀM LỒI

ThS. Võ Đức Thịnh
Khoa Sư phạm Toán-Tin, Trường Đại học Đồng Tháp
Email: vdthinh@dthu.edu.vn

Vũ Nhân Khánh
ĐHSTOAN14B, Khoa Sư phạm Toán-Tin, Trường Đại học Đồng Tháp
Email: vunhankhanh12@gmail.com

Tóm tắt. *Trong bài viết này, chúng tôi sử dụng phương pháp hàm lồi để chứng minh một số bài toán bất đẳng thức. Sau đó, bằng cách sử dụng các hàm lồi* $f(x) = -\ln x$ *và* $f(x) = x^{\alpha}$ *để xây dựng một số bài toán bất đẳng thức.*

1. Giới thiệu

Hằng năm bài toán về bất đẳng thức (BĐT) đều được đưa vào đề thi đại học và được xem là một trong những câu hỏi khó nhất để phân loại thí sinh. Hiện nay, nhiều phương pháp chứng minh BĐT đã được giới thiệu như phương pháp chuẩn hoá, phương pháp dồn biến, phương pháp tiếp tuyến,... Trong bài này, chúng tôi trình bày phương pháp sử dụng hàm lồi để giải các bài toán BĐT. Ngoài ra, chúng tôi cũng xây dựng một số lớp bài toán về chứng minh bất đẳng thức trên cơ sở các bất đẳng thức đã có và giải chúng bằng phương pháp hàm lồi.

2. Lí thuyết hàm lồi

Trong phần này, chúng tôi giới thiệu một số kiến thức cơ bản về hàm lồi. Trước tiên, chúng tôi giới thiệu khái niệm về hàm lồi.

Định nghĩa 2.1. Giả sử I là một khoảng trong $\mathbb{R}$. Hàm số $f : I \to \mathbb{R}$ được gọi là *lồi* trên khoảng I nếu với mọi $x_1; x_2 \in I$, với mọi $\alpha \in [0;1]$ ta có:

$$f(ax_1 + (1-a)x_2) \le af(x_1) + (1-a)f(x_2).$$

Sau đây, chúng tôi sẽ trình bày một số tính chất của hàm lồi:

Định lí 2.2. *Giả sử f có đạo hàm trên I. Khi đó f là hàm lồi trên I khi và chỉ khi f' tăng trên I.*

Hệ quả 2.3. *Giả sử f có đạo hàm đến cấp hai. Khi đó f là hàm lồi khi và chỉ khi $f'' \ge 0\ \forall x \in I$.*

Định lý 2.4. *Giả sử f là một hàm liên tục trên khoảng I thoả mãn điều kiện*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad \text{với mọi } x, y \in I .$$

Khi đó, f lồi trên I.

Sau đây chúng tôi sẽ giới thiệu một số hàm lồi quen thuộc.

1. $y = x^{\alpha}\left(x>0;\alpha<0 \text{ hoặc } \alpha>1\right)$;

2. $y = -\ln x\left(x>0\right)$;

3. $y = \ln\left(1+e^{x}\right)$;

4. $y = x\ln x\left(\forall x>0\right)$.

Định lí 2.5. (Bất đẳng thức Jensen) *Giả sử* $x_1, x_2, ..., x_n \in I$ *và* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in [0;1]$ *sao cho* $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n = 1$. *Khi đó nếu f(x) lồi trên I thì*

$$f\left(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+....+\alpha_n x_n\right) \le \alpha_1 f\left(x_1\right)+\alpha_2 f\left(x_2\right)+...+\alpha_n f\left(x_n\right).$$

Hệ quả 2.6. *Giả sử* $x_1, ..., x_n \in I$ *và* $m_1, m_2, ..., m_n > 0$. *Đặt* $m = m_1+m_2+...+m_n$ *và* $\alpha_1 = \frac{m_1}{m}; \alpha_2 = \frac{m_2}{m}; ....; \alpha_n = \frac{m_n}{m}$. *Khi đó ta có*

$$f\left(\frac{m_1 x_1+...+m_n x_n}{m_1+m_2+...+m_n}\right) \le \frac{m_1 f\left(x_1\right)+...+m_n f\left(x_n\right)}{m_1+m_2+...+m_n}.$$

3. Áp dụng

Hiện nay, các bài toán bất đẳng thức trong một số đề thi đại học có thể giải bằng phương pháp hàm lồi. Sau đây chúng tôi sẽ sử dụng phương pháp hàm lồi để chứng minh các bất đẳng thức trong các đề thi tuyển sinh đại học năm 2005, khối A,B. Sau đó, trên cơ sở lời giải của các bài toán này, chúng tôi xây dựng một số lớp bài toán bất đẳng thức có thể giải được bằng phương pháp hàm lồi.

3.1. Xây dựng lớp bài toán bất đẳng thức thông qua hàm lồi $f(x) = -\ln(x)$ với $x>0$

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x+\left(\frac{15}{4}\right)^x+\left(\frac{20}{3}\right)^x \ge 3^x+4^x+5^x.$$

(ĐH B-2005)

Chứng minh. Xét $f(x) = -\ln x$. Khi đó $f(x)$ là hàm lồi trên $(0;+\infty)$. Ta có:

$$-1n\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right) \le -\frac{1na_1+1na_2}{2} = -1n\sqrt{a_1 a_2}. \qquad (1)$$

Chọn $a_1 = \left(\frac{12}{5}\right)^x; a_2 = \left(\frac{15}{4}\right)^x$. Khi đó, ta có

$$-\ln\left(\frac{\left(\frac{12}{5}\right)^x+\left(\frac{15}{4}\right)^x}{2}\right) \le -\ln\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x\left(\frac{15}{4}\right)^x}.$$

Do đó $\dfrac{\left(\dfrac{12}{5}\right)^x+\left(\dfrac{15}{4}\right)^x}{2}\geq\sqrt{\left(\dfrac{12}{5}\right)^x\left(\dfrac{15}{4}\right)^x}$. Suy ra $\left(\dfrac{12}{5}\right)^x+\left(\dfrac{15}{4}\right)^x\geq 2.3^x.$ (2)

Tương tự, ta có $\left(\dfrac{12}{5}\right)^x+\left(\dfrac{20}{3}\right)^x\geq 2.4^x$; $\left(\dfrac{15}{4}\right)^x+\left(\dfrac{20}{3}\right)^x\geq 2.5^x.$ (3)

Từ (2) và (3), ta được điều phải chứng minh. □

Ví dụ 2: Chứng minh rằng

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1.a_2\ldots a_n}\ \text{với mọi}\ a_1,a_2,.,a_n\geq 0.$$

Chứng minh.

• Nếu $\min\{a_1,a_2,.,a_n\}=0$ thì $a_1.a_2\ldots a_n=0$. Do đó bất đẳng thức trên là đúng.

• Xét trường hợp còn lại: $\min\{a_1,a_2,.,a_n\}>0$. Đặt $f(x)=-\ln x$ *với* $x>0$. Khi đó $f(x)$ là hàm lồi với $x>0$. Ta có

$$-\ln\left(\frac{a_1+a_2+\ldots a_n}{n}\right)\leq-\frac{\ln a_3+\ln a_2+\ldots+\ln a_n}{n}=-\ln\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}.$$

Do đó

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\ \ \forall a_1a_2\ldots a_n>0.$$ □

Ví dụ 3: Chứng minh rằng $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\geq a+b+c$ với mọi $a,b,c>0.$

Chứng minh. Trong (1), ta thay $a_1=\dfrac{a^2}{b}$; $a_2=b\left(a,b>0\right)$, ta được

$$-\ln\left(\frac{\dfrac{a^2}{b}+b}{2}\right)\leq-\ln\left(\sqrt{\frac{a^2}{b}.b}\right).$$

Do đó $\dfrac{a^2}{b}+b\geq 2\sqrt{\dfrac{a^2}{b}.b}=2a.$ (4)

Tương tự ta có: $\dfrac{b^2}{c}+c\geq 2b\left(b,c>0\right)$; $\dfrac{c^2}{a}+a\geq 2c\left(a,c>0\right).$ (5)

Từ (4) và (5), suy ra $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\geq a+b+c\,\forall a,b,c>0.$ □

Ví dụ 4: Chứng minh rằng $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\geq a+b+c,$ với mọi $a,b,c>0.$

(Canada MO 2002)

Chứng minh: Xét $f(x)=-\ln x$. Khi đó $f(x)$ là hàm lồi trên khoảng $(0;+\infty)$. Ta có:

$$-\ln\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)\leq -\frac{\ln a_1+\ln a_2+\ln a_3}{3}=-\ln\sqrt[3]{a_1a_2a_3}. \qquad (6)$$

Chọn $a_1=\frac{a^3}{bc}; a_2=b; a_3=c.$ Ta có: $-\ln\left(\frac{\frac{a^3}{bc}+b+c}{3}\right)\leq -\ln\sqrt[3]{\frac{a^3}{bc}bc}.$

Suy ra: $\frac{a^3}{bc}+b+c\geq 3a.$ $\qquad (7)$

Tương tự ta có $\frac{b^3}{ac}+a+c\geq 3b; \frac{c^3}{ab}+a+b\geq 3c.$ $\qquad (8)$

Từ (7) và (8), suy ra $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ac}+\frac{c^3}{ab}\geq a+b+c.$ □

Bằng cách sử dụng tính chất của hàm lồi $f(x)=-\ln(x)$ và chọn biến số thích hợp, ta có thể chứng minh một số bất đẳng thức sau theo cách tương tự

1. $\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geq a+b+c,$ với mọi $a,b,c>0$
2. $\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geq \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a},$ với mọi $a,b,c>0$
3. $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq ab+bc+ca,$ với mọi $a,b,c>0$
4. $\frac{a^5}{b^3}+\frac{b^5}{c^3}+\frac{c^5}{a^3}\geq a^2+b^2+c^2,$ với mọi $a,b,c>0$

3.2. Xây dựng lớp bài toán bất đẳng thức thông qua hàm lồi $f(x)=x^\alpha\ (x>0;\alpha<0 \text{ hoặc } \alpha>1)$.

Ví dụ 5: Cho x,y,z là các số dương thoả mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\leq 1.$$

(ĐH A-2005)

Chứng minh. Xét $f(x)=\frac{1}{x}$. Khi đó $f(x)$ lồi trên khoảng $(0;+\infty)$. Ta có:

$$f\left(\frac{2a_1+b_2+c_3}{4}\right)\le\frac{1}{4}\left(2f\left(a_1\right)+f\left(a_2\right)+f\left(a_3\right)\right).$$

Thay $\left(a_1;a_2;a_3\right)$ lần lượt bằng ba bộ số $\left(x;y;z\right);\left(y;x;z\right);\left(z;x;y\right)$, ta được ba BĐT

$$\frac{1}{2x+y+z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right);\ \frac{1}{x+2y+z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}\right);$$

$$\frac{1}{x+y+2z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}\right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên, ta được

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{4}{x}+\frac{4}{y}+\frac{4}{z}\right)=1.$$ □

Ví dụ 6: Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{ax+by+cz}\le\frac{1}{\left(a+b+c\right)^2}\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)\ \left(\text{với mọi }a,b,c>0;x,y,z>0\right).$$

Chứng minh. Xét $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$. Khi đó $f\left(x\right)$ lồi trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$. Ta có:

$$f\left(\frac{ax+by+cz}{a+b+c}\right)\le\frac{1}{a+b+c}\left(af\left(x\right)+bf\left(y\right)+cf\left(z\right)\right).$$

Suy ra $\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)\ge\frac{a+b+c}{ax+by+cz}$.

Do đó $\frac{1}{ax+by+cz}\le\frac{1}{\left(a+b+c\right)^2}\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)$.

Nhận xét 7: Trong Ví dụ 6, cho $a=b=c=1$ .Ta được bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}\left(x,y,z>0\right).$$

Nhận xét 8: Ngoài ra, bất đẳng thức tổng quát hơn với n biến số dương $a_1;a_2;....;a_n$ cũng được chứng minh hoàn toàn tương tự

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\ge\frac{n^2}{a_1+a_2+...+a_n}.$$

Ví dụ 9: Cho a,b,c>0 thoả mãn điều kiện $a^3c+b^2a+c^3b=abc$. Chứng minh rằng

$$S=\frac{b}{a^2+ab}+\frac{c}{b^2+bc}+\frac{a}{c^2+ca}\ge\frac{9}{2}.$$

Chứng minh. Từ giả thiết, ta có: $1=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c;\forall a,b,c>0.$

Sử dụng nhận xét 7, ta có : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}\left(x,y,z>0\right)$.

Sau đó, ta thay $\left(x;y;z\right)$ lần lượt bằng các số $\left(\frac{a^2}{b}+a;\frac{b^2}{c}+b;\frac{c^2}{a}+c\right)$, ta được

$$\frac{1}{\frac{a^2}{b}+a}+\frac{1}{\frac{b^2}{c}+b}+\frac{1}{\frac{c^2}{a}+c}\ge\frac{9}{\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)+\left(a+b+c\right)}\ge\frac{9}{2\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)}=\frac{9}{2}.$$

Mặt khác $S=\frac{b}{a^2+ab}+\frac{c}{b^2+bc}+\frac{a}{c^2+ac}=\frac{1}{\frac{a^2}{b}+a}+\frac{1}{\frac{b^2}{c}+b}+\frac{1}{\frac{c^2}{a}+c}$.

Do đó, bất đẳng thức được chứng minh. □

Ví dụ 10: Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a+3b+2c}+\frac{bc}{b+3c+2a}+\frac{ca}{c+3a+2b}\le\frac{a+b+c}{6}.$$

(Tạp chí THTT)

Chứng minh. Sử dụng Nhận xét 7, ta có : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}\left(x,y,z>0\right)$.

Thay $\left(x;y;z\right)$ lần lượt bằng ba bộ số

$\left(a+c;b+c;2b\right);\left(a+b;a+c;2c\right);\left(b+c;a+b;2a\right)$, ta được:

$$\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{2b}\ge\frac{9}{a+3b+2c};\quad \frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{2c}\ge\frac{9}{2a+b+3c};$$

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2a}\ge\frac{9}{3a+2b+c}.$$

Do đó, ta có:

$$\frac{ab}{9}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{2b}\right)\ge\frac{ab}{a+3b+2c};\quad \frac{bc}{9}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{2c}\right)\ge\frac{bc}{2a+b+3c};$$

$$\frac{ac}{9}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2a}\right)\ge\frac{ac}{3a+2b+c}.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên, ta được

$$\frac{ab}{a+3b+2c}+\frac{bc}{2a+b+3c}+\frac{ac}{3a+2b+c}\le\frac{1}{9}\left(\frac{bc+ca}{a+b}+\frac{ca+ab}{b+c}+\frac{ab+bc}{a+c}+\frac{a+b+c}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{9}\left(\frac{a+b+c}{2}+a+b+c\right)=\frac{a+b+c}{6}.$$ □

Ví dụ 11: Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ac}{a+c+2b}\le\frac{a+b+c}{4}.$$

Chứng minh. Áp dụng Nhận xét 8 với n=2, ta có: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}\left(x,y>0\right)$.

Thay $\left(x;y\right)$ lần lượt bằng ba bộ số $\left(a+c;b+c\right);\left(a+b;a+c\right);\left(b+c;a+b\right)$; ta được:

$$\begin{cases}\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\geq\frac{4}{2c+a+b}\\ \frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\geq\frac{4}{2a+b+c}\\ \frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}\geq\frac{4}{2b+a+c}\end{cases}. \text{ Suy ra } \begin{cases}\frac{ab}{4}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)\geq\frac{ab}{2c+a+b}\\ \frac{bc}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)\geq\frac{bc}{2a+b+c}\\ \frac{ac}{4}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}\right)\geq\frac{ac}{2b+a+c}\end{cases}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên, ta được

$$\frac{ab}{2c+a+b}+\frac{bc}{2a+b+c}+\frac{ac}{2b+a+c}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{bc+ca}{a+b}+\frac{ca+ab}{b+c}+\frac{ab+bc}{a+c}\right)=\frac{a+b+c}{4}. \quad \square$$

4. Kết luận và kiến nghị

Trong bài viết này, chúng tôi sử dụng hai hàm lồi $f(x)=-\ln x$ và $f(x)=x^{\alpha}$ $(x\geq 0, \alpha<0$ hoặc $\alpha>1)$ để xây dựng và chứng minh một số bài toán bất đẳng thức. Bằng cách tương tự với các hàm lồi $f(x)=x\ln x (x>0)$ và $f(x)=\ln(1+e^{x})$, chúng ta có thể xây dựng một số bài toán bất đẳng thức khác. Đây là vấn đề chúng tôi sẽ nghiên cứu trong tương lai.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. R. T. Rokafellar, *Convex analysis*, Princeton University Press, 1997.
2. T. Phương, *Những viên kim cương trong bất đẳng thức*, NXB Tri Thức, 2011.