ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG VỚI ĐIỀU KIỆN A-SUY RỘNG TRONG KHÔNG GIAN KIỂU-MÊTRIC

Trương Thị Khánh Huyền
ĐHSTOAN12, Khoa Sư phạm Toán-Tin, Trường Đại học Đồng Tháp
Email: pichupuma@gmail.com

Tóm tắt. *Trong bài viết này, chúng tôi thiết lập và chứng minh định lí điểm bất động với điều kiện A-suy rộng trong không gian kiểu-mêtric bằng việc thêm sáu giá trị $D(x,Ty), D(y,Tx), D(T^2x,x), D(T^2x,Tx), D(T^2x,y), D(T^2x,Ty)$ vào điều kiện co. Đồng thời, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.*

1 Mở đầu

Với nhiều định lí điểm bất động trong không gian mêtric, chúng ta thấy rằng điều kiện co thường chứa tối đa năm giá trị là $d(x,y), d(Tx,x), d(Ty,y), d(y,Tx), d(x,Ty)$. Năm 2014, trong tài liệu [9], P. Kumam và cộng sự đã bổ sung thêm bốn giá trị mới $d(T^2x,x), d(T^2x,Tx), d(T^2x,y), d(T^2x,Ty)$ vào điều kiện co và chứng minh định lí điểm bất động đối với các biểu thức chứa giá trị này.

Năm 2008, Akram và cộng sự [10] đã giới thiệu điều kiện A-co và tổng hợp nhiều điều kiện co đối với ánh xạ $T : X \longrightarrow X$ xác định trên không gian mêtric (X,d). Năm 2010, Khamsi [5] đã giới thiệu khái niệm không gian kiểu-mêtric và thiết lập một số định lí điểm bất động trong không gian này. Không gian kiểu-mêtric sau đó đã được một số tác giả quan tâm nghiên cứu.

Bằng cách tương tự, chúng tôi đặt vấn đề mở rộng những kết quả trong bài báo [10] đối với không gian kiểu-mêtric bằng việc thêm sáu giá trị sau vào điều kiện A-co

$$D(x,Ty), D(y,Tx), D(T^2x,x), D(T^2x,Tx), D(T^2x,y), D(T^2x,Ty).$$

1.1 Định nghĩa ([5], Định nghĩa 2.7)**.** Cho X là một tập khác rỗng, $K \geq 1$ và $D : X \times X \longrightarrow [0,\infty)$ là một hàm thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $x, z_1, \ldots, z_n, y \in X$.

1. $D(x,y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$.
2. $D(x,y) = D(y,x)$.
3. $D(x,y) \leq K\big[D(x,z_1) + D(z_1,z_2) + \ldots + D(z_n,y)\big]$.

Khi đó, D được gọi là một *kiểu-mêtric* trên X và (X,D,K) được gọi là một *không gian kiểu-mêtric*.

1.2 Định nghĩa ([5], Định lí 2.8)**.** Cho (X,D,K) là một không gian kiểu-mêtric và $\{x_n\}$ là một dãy trong X. Khi đó

1. Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *hội tụ* đến $x \in X$, viết là $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n,x) = 0$. Khi đó, x được gọi là *điểm giới hạn* của dãy $\{x_n\}$.
2. Dãy $\{x_n\}$ được gọi là một dãy *Cauchy* nếu $\lim\limits_{n,m\to\infty} D(x_n,x_m) = 0$.

3. Không gian (X, D, K) được gọi là *đầy đủ* nếu mỗi dãy Cauchy là một dãy hội tụ.

1.3 Mệnh đề ([3], Mệnh đề 1.1.7)**.** *Cho (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric. Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ thì giới hạn của nó là duy nhất.*

Tiếp theo là định nghĩa A-co trong không gian mêtric.

1.4 Định nghĩa ([5], Định nghĩa 1)**.** Cho (X, d) là một không gian mêtric và $T : X \longrightarrow X$ là một ánh xạ. Khi đó T được gọi là A-co nếu tồn tại $\alpha \in \mathcal{A}$ sao cho với mọi $x, y \in X$,

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha\big(d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty)). \tag{1.1}$$

Ở đây, $\mathcal{A}$ là họ các hàm $\alpha : \mathbb{R}^3_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ thỏa mãn

1. α liên tục.
2. Tồn tại $k \in [0, 1)$ sao cho nếu $a \leq \alpha(a, b, b)$ hoặc $a \leq \alpha(b, a, b)$ hoặc $a \leq \alpha(b, b, a)$ thì $\alpha \leq kb$.

1.5 Nhận xét. Trong không gian kiểu-mêtric (X, D, K), tôpô được hiểu là tôpô cảm sinh bởi sự hội tụ của nó. Điều này có nghĩa là tập G mở trong không gian kiểu-mêtric (X, D, K) khi và chỉ khi với mỗi $x \in G$, mọi dãy $\{x_n\} \subset X$ mà $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ thì tồn tại n_0 sao cho $x_n \in G$ với mọi $n \geq n_0$. Khi đó kiểu-mêtric $D : X \times X \to [0, \infty)$ là liên tục tại (x, y) nếu và chỉ nếu $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n, y_n) = (x, y)$ với mọi dãy $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ mà $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Suy ra nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n, y_n) = D(x, y)$.

2 Kết quả chính

Chúng tôi đưa ra định nghĩa A-co suy rộng như sau.

2.1 Định nghĩa. Cho (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric và $T : X \longrightarrow X$ là ánh xạ. Khi đó T được gọi là A-co suy rộng nếu tồn tại $\beta \in \mathcal{B}$ sao cho với mọi $x, y \in X$,

$$\begin{aligned} D(Tx, Ty) \leq \beta\big(&D(x, y), D(x, Tx), D(y, Ty), D(x, Ty), D(y, Tx),\\ &D(T^2x, x), D(T^2x, Tx), D(T^2x, y), D(T^2x, Ty)). \end{aligned}$$

Ở đây, $\mathcal{B}$ là họ các hàm $\beta : \mathbb{R}^9_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ thỏa mãn

1. β liên tục.
2. Với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}_+$,
   a) Nếu $x \leq \beta(0, 0, x, x, 0, 0, 0, 0, x)$ hoặc $x \leq \beta(x, 0, 0, x, x, 0, 0, x, x)$ thì $x = 0$.
   b) Tồn tại $K \in [0, 1)$ để nếu $z \leq K(x + y)$ và $y \leq \beta(x, x, y, z, 0, z, y, y, 0)$ hoặc $y \leq \beta(x, y, x, z, 0, z, y, y, 0)$ hoặc $y \leq \beta(y, x, x, z, 0, z, y, y, 0)$ thì $y \leq Kx$.

Chúng tôi đưa ra mối quan hệ giữa A-co và A-co suy rộng như sau.

2.2 Nhận xét ([2], Nhận xét 3.1)**.** 1. Nếu $\alpha \in \mathcal{A}$ và với mọi $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \in \mathbb{R}_+$, $\beta(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9) = \alpha(x_1, x_2, x_3)$ thì $\beta \in \mathcal{B}$.

2. Nếu $\beta \in \mathcal{B}$ và $\alpha(x, y, z) = \beta(x, y, z, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ thì $\alpha \in \mathcal{A}$.

2.3 Định lí. *Giả sử (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric đầy đủ sao cho D liên tục và $T : X \longrightarrow X$ là một ánh xạ A-co suy rộng. Khi đó T có điểm bất động duy nhất trong X và dãy $\{T^n x_0\}$ hội tụ về điểm bất động với mọi $x_0 \in X$.*

Chứng minh. Với $x_0 \in X$, đặt $x_n = T^n x_0$ với mọi $n = 1, 2, 3, ...$ Khi đó, $x_{n+1} = T^{n+1}x_0 = Tx_n$. Vì T là một A-co suy rộng nên tồn tại $\beta \in \mathcal{B}$ sao cho với mọi $x, y \in X$,

$$\begin{aligned} D(Tx, Ty) \leq \beta\big(&D(x, y), D(x, Tx), D(y, Ty), D(x, Ty), D(y, Tx),\\ &D(T^2x, x), D(T^2x, Tx), D(T^2x, y), D(T^2x, Ty)\big). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Thay $x = x_{n-1}$ và $y = x_n$ trong (2.1), ta có

$$\begin{aligned} D(x_n, x_{n+1}) &= D(Tx_{n-1}, Tx_n)\\ &\leq \beta\big(D(x_{n-1}, x_n), D(x_{n-1}, Tx_{n-1}), D(x_n, Tx_n), D(x_{n-1}, Tx_n),\\ &\quad D(x_n, Tx_{n-1}), D(T^2x_{n-1}, x_{n-1}), D(T^2x_{n-1}, Tx_{n-1}), D(T^2x_{n-1}, x_n),\\ &\quad D(T^2x_{n-1}, Tx_n)\big)\\ &= \beta\big(D(x_{n-1}, x_n), D(x_{n-1}, x_n), D(x_n, x_{n+1}), D(x_{n-1}, x_{n+1}),\\ &\quad D(x_n, x_n), D(x_{n+1}, x_{n-1}), D(x_{n+1}, x_n), D(x_{n+1}, x_n), D(x_{n+1}, x_{n+1})\big)\\ &= \beta\big(D(x_{n-1}, x_n), D(x_{n-1}, x_n), D(x_n, x_{n+1}), D(x_{n-1}, x_{n+1}),\\ &\quad 0, D(x_{n+1}, x_{n-1}), D(x_{n+1}, x_n), D(x_{n+1}, x_n), 0\big). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Vì $\beta \in \mathcal{B}$ và $D(x_{n-1}, x_{n+1}) \leq K[D(x_{n-1}, x_n) + D(x_n, x_{n+1})]$ nên từ (2.2) ta có

$$D(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda D(x_{n-1}, x_n).$$

Từ đó suy ra

$$D(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda D(x_{n-1}, x_n) \leq \lambda^2 D(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq ... \leq \lambda^n D(x_0, x_1).$$

Do đó với mọi $\lambda \in [0, 1)$, ta có

$$D(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^n D(x_0, x_1). \tag{2.3}$$

Giả sử $n \leq m$, theo Định nghĩa 1.1.(3) ta có

$$\begin{aligned} D(x_m, x_n) &\leq K[D(x_n, x_{n+1}) + D(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + D(x_{m-1}, x_m)]\\ &\leq K[\lambda^n D(x_0, x_1) + \lambda^{n+1} D(x_0, x_1) + \cdots + \lambda^{m-1} D(x_0, x_1)]\\ &= KD(x_0, x_1)(\lambda^n + \lambda^{n+1} + \cdots + \lambda^{m-1})\\ &\leq K\frac{\lambda^n}{1-\lambda} D(x_0, x_1). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Cho $m, n \to \infty$ trong (2.4), ta có

$$\lim_{n,m\to\infty} D(x_n, x_m) = 0. \tag{2.5}$$

Vậy $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy trong X. Vì X đầy đủ nên tồn tại $x' \in X$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x'. \tag{2.6}$$

Mặt khác, khi thay $x = x'$ và $y = x_n$ trong (2.1), với mọi $n = 1, 2, 3, ...$, ta có

$$\begin{aligned} D(Tx', x_{n+1}) &= D(Tx', Tx_n) \\ &\leq \beta\big(D(x_n, x'), D(x_n, Tx_n), D(x', Tx'), D(x_n, Tx'), D(x', Tx_n), \\ &\quad D(T^2x_n, x_n), D(T^2x_n, Tx_n), D(T^2x_n, x'), D(T^2x_n, Tx')) \\ &= \beta\big(D(x_n, x'), D(x_n, Tx_n), D(x', Tx'), D(x_n, Tx'), D(x', Tx_n), \\ &\quad D(T^2x_n, x_n), D(T^2x_n, Tx_n), D(T^2x_n, x'), D(T^2x_n, Tx')) \\ &= \beta\big(D(x_n, x'), D(x_n, x_{n+1}), D(x', Tx'), D(x_n, Tx'), D(x', x_{n+1}), \\ &\quad D(x_{n+2}, x_n), D(x_{n+2}, x_{n+1}), D(x_{n+2}, x'), D(x_{n+2}, Tx')). \qquad (2.7) \end{aligned}$$

Cho $n \to \infty$ trong (2.7), sử dụng tính liên tục của β, tính liên tục của kiểu-mêtric D và (2.5), ta có

$$\begin{aligned} D(Tx', x') &\leq \beta\big(D(x', x'), D(x', x'), D(x', Tx'), D(x', Tx'), D(x', x'), \\ &\quad D(x', x'), D(x', x'), D(x', x'), D(x', Tx')) \\ &= \beta\big(0, 0, D(x', Tx'), D(x', Tx'), 0, 0, 0, 0, D(x', Tx')). \end{aligned}$$

Vì $\beta \in \mathcal{B}$ nên $D(Tx', x') = 0$ hay $Tx' = x.'$ Vậy x' là điểm bất động của T.

Tiếp theo ta chứng minh tính duy nhất điểm bất động của T.

Giả sử x' và x'' là hai điểm bất động của T. Khi đó thay $x = x'$ và $y = x''$ trong (2.1), ta có

$$\begin{aligned} D(x', x'') &= D(Tx', Tx'') \\ &\leq \beta\big(D(x', x''), D(x', Tx'), D(x'', Tx''), D(x', Tx''), D(x'', Tx'), \\ &\quad D(T^2x', x'), D(T^2x', Tx'), D(T^2x', x''), D(T^2x', Tx'')) \\ &= \beta\big(D(x', x''), D(x', x'), D(x'', x''), D(x', x''), D(x'', x'), \\ &\quad D(x', x'), D(x', x'), D(x', x''), D(x', x'')) \\ &= \beta\big(D(x', x''), 0, 0, D(x', x''), D(x'', x'), 0, 0, D(x', x''), D(x', x'')). \end{aligned}$$

Vì $\beta \in \mathcal{B}$ nên $D(x', x'') = 0$ hay $x' = x''$. Vậy T có duy nhất điểm bất động.

Cuối cùng, từ công thức (2.5) ta có $\lim T^n x_0 = x'$. □

2.4 Định lí. *Giả sử (X, D, K) là không gian kiểu-mêtric đầy đủ với D liên tục và dãy ánh xạ $T_n : X \longrightarrow X$ sao cho tồn tại $\beta \in \mathcal{B}$ và với mọi $x, y \in X$,*

$$\begin{aligned} D(T_ix, T_jy) &\leq \beta\big((D(x, y), D(x, T_ix), D(y, T_jy), D(x, T_jy), D(y, T_ix), \\ &\quad D(T_{i+1}T_ix, x), D(T_{i+1}T_ix, T_ix), D(T_{i+1}T_ix, y), \\ &\quad D(T_{i+1}T_ix, T_jy)\big). \qquad (2.8) \end{aligned}$$

Khi đó dãy $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ có một điểm bất động chung duy nhất trong X.

2.5 Định lí. *Gỉa sử (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric đầy đủ với D liên tục $S : X \longrightarrow X$ và $T : X \longrightarrow X$ là hai ánh xạ, tồn tại $\beta \in \mathcal{B}$và với mọi $x, y \in X$,*

$$\begin{aligned} D(Tx, Sy) &\leq \beta\big(D(x, y), D(x, Tx), D(y, Sy), D(x, Sy), D(y, Tx), \\ &\quad D(STx, x), D(STx, Tx), D(STx, y), D(STx, Sy)). \qquad (2.9) \end{aligned}$$

Khi đó S và T có duy nhất một điểm bất động chung duy nhất trong X.

2.6 Hệ quả. *Giả sử (X, d) là không gian mêtric đầy đủ và $T : X \longrightarrow X$ là một ánh xạ, tồn tại $\beta \in \mathcal{B}$ và với mọi $x, y \in X$,*

$$d(Tx, Ty) \le \beta\big(d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx),\\ d(T^2x, x), d(T^2x, Tx), d(T^2x, y), d(T^2x, Ty))$$

Khi đó T có duy nhất một điểm bất động và dãy $\{T^n x_0\}$ hội tụ về điểm bất động với mọi $x_0 \in X$.

2.7 Hệ quả. *Giả sử (X, d) là không gian mêtric đày đủ, dãy ánh xạ $T_n : X \longrightarrow X$ và tồn tại $\beta \in \mathcal{B}$, với mọi $x, y \in X$,*

$$\begin{aligned} d(T_ix, T_jy) \quad \le \quad & \beta\big((d(x, y), d(x, T_ix), d(y, T_jy), d(x, T_jy), d(y, T_ix),\\ & d(T_{i+1}T_ix, x), d(T_{i+1}T_ix, T_ix), d(T_{i+1}T_ix, y), d(T_{i+1}T_ix, T_jy)\big). \end{aligned}$$

Khi đó $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ có một điểm bất động chung duy nhất trong X.

2.8 Hệ quả. *Cho (X, d) là một không gian mêtric đầy đủ, $S : X \longrightarrow X$ và $T : X \longrightarrow X$ là hai ánh xạ, tồn tại $\beta \in \mathcal{B}$ và với mọi $x, y \in X$,*

$$\begin{aligned} d(Tx, Sy) \quad \le \quad & \beta\big(d(x, y), d(x, Tx), d(y, Sy), d(x, Sy), d(y, Tx),\\ & d(STx, x), d(STx, Tx), d(STx, y), d(STx, Sy)) \end{aligned}$$

Khi đó S và T có điểm bất động chung duy nhất.

2.9 Hệ quả ([10], Định lí 5)**.** *Cho T là một A-co trong không gian mêtric đầy đủ X. Khi đó T có duy nhất một điểm bất động trong X và dãy $\{T^n x_0\}$ hội tụ về điểm bất động với mọi $x_0 \in X$.*

2.10 Hệ quả ([10], Định lí 6)**.** *Cho (X, d) là một không gian mêtric đầy đủ và dãy ánh xạ $T_n : X \longrightarrow X$, tồn tại $\alpha \in \mathcal{A}$ và với mọi $x, y \in X$,*

$$d(T_ix, T_jy) \le \alpha\big(d(x, y), d(T_ix, x), d(T_jy, y)).$$

Khi đó $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ có một điểm bất động chung duy nhất trong X.

Sau đây chúng tôi sẽ đưa ra một ví dụ cho Hệ quả 2.6

2.11 Ví dụ. Cho $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ và d được xác định

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } x = y \\ 2 \text{ nếu}(x, y) \in \{(-2, 1), (-2, 2), (-1, 2), (2, -2)\} \\ 1 \text{ trong trường hợp còn lại} \end{cases}$$

khi đó (X, d) là không gian mêtric đầy đủ.

Cho $T : X \longrightarrow X$ như sau

$$T(-2) = T(-1) = T0 = -2, T1 = -1, T2 = 0.$$

Ta có

$d(Tx, Ty) = d(-2, -2) = 0$ nếu $x, y \in \{-2, -1, 0\}$.
$d(T(-2), T1) = d(-2, -1) = 1, d(-2, 1) = 2$.
$d(T(-2), T2) = d(-2, 0) = 1, d(-2, 2) = 2$.
$d(T(-1), T1) = d(-2, -1) = 1, d(T(-1), 1) = d(-2, 1) = 2$.
$d(T(-1), T2) = d(-2, 0) = 1, d(-1, 2) = 2$.
$d(T0, T1) = d(-2, -1) = 1, d(T^2 0, 1) = d(-2, 1) = 2$.
$d(T0, T2) = d(T(-2), 0) = 1, d(T^2 0, 2) = 2$.
$d(T1, T2) = d(-1, 0) = 1, d(T^2 1, 2) = d(-1, 2) = 2$.

Tính toán ở trên cho thấy điều kiện ở Hệ quả 2.9 không đúng với $x = 1, y = 2$ nhưng đúng với điều kiện ở Định lí 2.6 với $K = 2$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. G. Akinbo, M. O. Olatinwo, A. O. Bosede, *A note on A-contractions and common gixed points*, Acta Uviv. Apulensis (2010), no. 23, 91 – 98.
2. T. V. An, N. V. Dung, V. T. L. Hang, *General fixed point theorems on metric spaces and 2-metric spaces*, Filomat **28** (2014), no. 10, 2037 – 2045.
3. H. Q. Ái, *Về định lí điểm bất động của lớp ánh xạ Meir-Keeler α-co trên không gian kiểu-mêtric*, Đề tài nghiên cứu khoa học của sinh viên, Trường Đại học Đồng Tháp, 2014.
4. N. Định và N. Hoàng, *Hàm số biến số thực*, NXB Giáo dục, (2003).
5. M. A. Khamsi, *Remarks on cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings*, Fixed Point Theory Appl. **7** (2010).
6. N. T. Hiếu, *Về định kí điểm bất động trên không gian S-mêtric thứ tự bộ phận*, Tạp chí khoa học Đại học Đồng Tháp, (2013), 47 – 55.
7. N. T. Hiếu, N. T. K. Trang, *Về định lí điêm bất động cho lớp ánh xạ tựa co trên không gian S-mêtric thứ tự bộ phận*, Tạp chí khoa học trường Đại học An Giang 1 (2013), 8 – 16.
8. M. A. Khamsi, N. Hussain, *KKM mappings in metric type space*, Nonlinear Anal. **7** (2010), 3123 – 3129.
9. P. Kuman, N. V. Dung, and K.Sitthithakernkiet, *A generalization of Ciric fixed poinr theorem*, Folimat (2014), accepted paper.
10. M. Akram, A. A. Zafar, A. A. Siddiqui, *A general class of contractions: A-contractions*, Novi Sad J. Math. **38** (2008), no. 1, 25 – 33.
11. N. T. A. Nguyệt, *Định lí điểm bất động cho hai ánh xạ thoả mãn điều kiện (B) suy rộng trong không gian kiểu-mêtric*, Đề tài nghiên cứu khoa học của sinh viên, Trường Đại học Đồng Tháp, 2014.
12. N. H. Nhi, *Suy rộng định lí của Pant cho không gian S-mêtric*, Khóa luận đại học, Trường Đại học Đồng Tháp, 2013.

13. N. C. Tâm, *Về định lí điểm bất động cho dạng φ-co yếu suy rộng trong không gian kiểu-mêtric*, Đề tài nghiên cứu khoa học của sinh viên, Trường Đại học Đồng Tháp, 2014.

14. N. T. T. Trang, *Suy rộng định lí của Wardowski cho không gian S-mêtric*, Khóa luận đại học, Trường Đại học Đồng Tháp, 2013.