ĐỊNH LÍ ĆIRIĆ TRONG KHÔNG GIAN KIỂU-MÊTRIC

Trần Thu Hiền
ĐHSTOAN11, Khoa Sư phạm Toán-Tin, Trường Đại học Đồng Tháp
Email: thuhiendhstoan@gmail.com

Tóm tắt. *Trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu một dạng mở rộng mới của Định lí điểm bất động Ćirić trong không gian kiểu-mêtric. Đồng thời, chúng tôi suy ra một số hệ quả từ định lí này. Các kết quả này là sự mở rộng của các định lí điểm bất động Ćirić trong bài báo [5]. Ngoài ra, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.*

1 Mở đầu

Năm 2010, M. A. Khamsi [4] đã giới thiệu khái niệm không gian kiểu-mêtric và thiết lập một số định lí điểm bất động trong không gian này. Hướng nghiên cứu này đã được một số tác giả quan tâm nghiên cứu. N. T. Hieu và V. T. L. Hang [6] đã thiết lập định lí điểm bất động kép cho ánh xạ co trong không gian kiểu-mêtric; N. T. A. Nguyệt [8] nghiên cứu định lí điểm bất động cho hai ánh xạ thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng trong không gian kiểu-mêtric; N. C. Tâm [12] nghiên cứu định lí điểm bất động cho dạng co yếu suy rộng trong không gian kiểu-mêtric.

Gần đây, P. Kumam và cộng sự [5] đã thiết lập một dạng mở rộng mới cho Định lí Ćirić trong không gian mêtric. Kĩ thuật này có thể được áp dụng để mở rộng nhiều định lí điểm bất động khác nhau, trong những không gian mêtric suy rộng khác nhau. Bằng cách tương tự, chúng tôi đặt vấn đề mở rộng các kết quả trong [5] sang không gian kiểu-mêtric.

1.1 Định nghĩa ([4], Definition 2.7)**.** Cho X là một tập khác rỗng, $K \geq 1$ và $D : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ là một hàm số thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $x, z_1, \ldots, z_n, y \in X$.

1. $D(x, y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$.
2. $D(x, y) = D(y, x)$.
3. $D(x, y) \leq K\big[D(x, z_1) + D(z_1, z_2) + \ldots + D(z_n, y)\big]$.

Khi đó, D được gọi là một *kiểu-mêtric* trên X và (X, D, K) được gọi là một *không gian kiểu-mêtric*.

Một số khái niệm và tính chất liên quan được dùng trong bài viết.

1.2 Định nghĩa ([4], Definition 2.8)**.** Cho (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric và $\{x_n\}$ là một dãy trong X. Khi đó

1. Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *hội tụ* đến $x \in X$, viết là $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n, x) = 0$. Khi đó, x được gọi là *điểm giới hạn* của dãy $\{x_n\}$.
2. Dãy $\{x_n\}$ được gọi là một *dãy Cauchy* nếu $\lim\limits_{n,m\to\infty} D(x_n, x_m) = 0$.
3. Không gian (X, D, K) được gọi là *đầy đủ* nếu mỗi dãy Cauchy là một dãy hội tụ.

1.3 Mệnh đề ([1], Mệnh đề 1.1.7)**.** *Cho (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric. Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ thì giới hạn của nó là duy nhất.*

1.4 Nhận xét ([1], Nhận xét 1.1.5)**.** Trong không gian kiểu-mêtric (X, D, K), tôpô được hiểu là tôpô cảm sinh bởi sự hội tụ của nó. Điều này có nghĩa là tập G mở trong không gian kiểu-mêtric (X, D, K) khi và chỉ khi với mỗi $x \in G$, mọi dãy $\{x_n\} \subset X$ mà $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ thì tồn tại n_0 sao cho $x_n \in G$ với mọi $n \geq n_0$. Khi đó kiểu-mêtric $D : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ là liên tục tại (x, y) nếu và chỉ nếu $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n, y_n) = D(x, y)$ với mọi dãy $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ mà $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Do đó nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n, y) = D(x, y)$.

1.5 Định nghĩa ([2])**.** Cho (X, d) là một không gian mêtric và $T : X \longrightarrow X$ là một ánh xạ. Với mọi $x \in X, n \in \mathbb{N}$, đặt $O_T(x, n) = \{x, Tx, ..., T^n x\}$, $O_T(x, +\infty) = \{x, Tx, ..., T^n x, ...\}$. Khi đó, X được gọi là T-quỹ đạo đầy đủ nếu mỗi dãy *Cauchy* trong $O_T(x, +\infty)$ là một dãy hội tụ.

Trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu một dạng mở rộng các kết quả trong [5] sang không gian kiểu-mêtric. Đồng thời, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả thu được.

2 Kết quả chính

Trước hết, chúng tôi giới thiệu khái niệm T-quỹ đạo đầy đủ trong không gian kiểu-mêtric.

2.1 Định nghĩa. Cho (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric và $T : X \longrightarrow X$ là một ánh xạ. Với mọi $x \in X, n \in \mathbb{N}$, đặt $O_T(x, n) = \{x, Tx, ..., T^n x\}$, $O_T(x, +\infty) = \{x, Tx, ..., T^n x, ...\}$. Khi đó, X được gọi là T-quỹ đạo đầy đủ nếu mỗi dãy *Cauchy* trong $O_T(x, +\infty)$ là một dãy hội tụ.

2.2 Nhận xét. Cho (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric và $T : X \longrightarrow X$ là một ánh xạ. Nếu không gian (X, D, K) là đầy đủ thì X là T-quỹ đạo đầy đủ.

Bằng cách thay không gian mêtric bởi không gian kiểu-mêtric và $[0; 1)$ bởi $\left[0; \dfrac{1}{K}\right)$ trong ([5], Theorem 3.1), chúng tôi thu được kết quả sau.

2.3 Định lí. *Cho (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric và ánh xạ $T \colon X \longrightarrow X$ thỏa mãn*

1. *D liên tục.*
2. *X là T-quỹ đạo đầy đủ.*
3. *Tồn tại $q \in \left[0; \dfrac{1}{K}\right)$ sao cho với mọi $x, y \in X$,*

$$\begin{aligned} D(Tx, Ty) \leq\ & q \max\big\{D(x, y), D(x, Tx), D(y, Ty), D(x, Ty), D(y, Tx), D(T^2x, x), \\ & D(T^2x, Tx), D(T^2x, y), D(T^2x, Ty)\big\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Khi đó

1. T có duy nhất một điểm bất động $x^* \in X$.

2. Với mọi $x \in X, n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = x^*$.

3. Với mọi $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$,

$$D(T^n x, x^*) \leq \frac{Kq^n}{1-Kq} D(x, Tx).$$

Chứng minh. (1). Với mọi $x \in X, 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n$, từ (2.1) ta có

$$\begin{aligned}
D(T^i x, T^j x) &= D(TT^{i-1}x, TT^{j-1}x) \\
&\leq q \max\big\{D(T^{i-1}x, T^{j-1}x), D(T^{i-1}x, TT^{i-1}x), \\
&\quad D(T^{j-1}x, TT^{j-1}x), D(T^{i-1}x, TT^{j-1}x), \\
&\quad D(T^{j-1}x, TT^{i-1}x), D(T^2T^{i-1}x, T^{i-1}x), \\
&\quad D(T^2T^{i-1}x, TT^{i-1}x), D(T^2T^{i-1}x, T^{j-1}x), D(T^2T^{i-1}x, TT^{j-1}x)\big\} \\
&= q \max\big\{D(T^{i-1}x, T^{j-1}x), D(T^{i-1}x, T^i x), \\
&\quad D(T^{j-1}x, T^j x), D(T^{i-1}x, T^j x), \\
&\quad D(T^{j-1}x, T^i x), D(T^{i+1}x, T^{i-1}x), \\
&\quad D(T^{i+1}x, T^i x), D(T^{i+1}x, T^{j-1}x), D(T^{i+1}x, T^j x)\big\} \\
&\leq q\delta[O_T(x,n)] \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

với $\delta[O_T(x,n)] = \max\{D(T^i x, T^j x) : 0 \leq i, j \leq n\}$.
Từ (2.2), vì $q \in \left[0; \dfrac{1}{K}\right)$ nên tồn tại $k_n(x) \leq n$ sao cho

$$D(x, T^{k_n(x)}x) = \delta[O_T(x,n)]. \qquad (2.3)$$

Khi đó, từ Định nghĩa 1.1.(3), (2.2) và (2.3), ta có

$$\begin{aligned}
D(x, T^{k_n(x)}x) &\leq K[D(x,Tx) + D(Tx, T^{k_n(x)}x)] \\
&\leq KD(x,Tx) + Kq\delta[O_T(x,n)] \\
&= KD(x,Tx) + KqD(x, T^{k_n(x)}x).
\end{aligned}$$

Do đó

$$\delta[O_T(x,n)] = D(x, T^{k_n(x)}x) \leq \frac{K}{1-Kq} D(x,Tx). \qquad (2.4)$$

Với mọi $n, m \geq 1$, $n < m$, $q \in \left[0; \dfrac{1}{K}\right)$, từ (2.2), (2.3) và (2.4), ta có

$$\begin{aligned}
D(T^n x, T^m x) &= D(TT^{n-1}x, T^{m-n+1}T^{n-1}x) \\
&\leq q\delta[O_T(T^{n-1}x, m-n+1)] \\
&= qD(T^{n-1}x, T^{k_{m-n+1}(T^{n-1}x)}T^{n-1}x) \\
&= qD(TT^{n-2}x, T^{k_{m-n+1}(T^{n-1}x)+1}T^{n-2}x) \\
&\leq q^2\delta[O_T(T^{n-2}x, k_{m-n+1}(T^{n-1}x)+1)] \\
&\leq q^2\delta[O_T(T^{n-2}x, m-n+2)] \\
&\leq \ldots \\
&\leq q^n\delta[O_T(x,m)] \\
&\leq \frac{Kq^n}{1-Kq} D(x,Tx). \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Cho $n, m \to \infty$ trong (2.5) ta có $\lim\limits_{n,m\to\infty} D(T^n x, T^m x) = 0$. Vậy $\{T^n x\}$ là một dãy *Cauchy* trong X. Vì X là T-quỹ đạo đầy đủ nên tồn tại $x^* \in X$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} T^n x = x^*. \tag{2.6}$$

Từ Định nghĩa 1.1.(3) và (2.1), ta có

$$\begin{aligned}
D(x^*, Tx^*) &\leq KD(x^*, T^{n+1}x) + KD(T^{n+1}x, Tx^*)\\
&= KD(x^*, T^{n+1}x) + KD(TT^n x, Tx^*)\\
&\leq KD(x^*, T^{n+1}x) + Kq \max\big\{D(T^n x, x^*), D(T^n x, TT^n x),\\
&\quad D(x^*, Tx^*), D(T^n x, Tx^*), D(x^*, TT^n x), D(T^2T^n x, T^n x),\\
&\quad D(T^2T^n x, TT^n x), D(T^2T^n x, x^*), D(T^2T^n x, Tx^*)\big\}\\
&= KD(x^*, T^{n+1}x) + Kq \max\big\{D(T^n x, x^*), D(T^n x, T^{n+1}x),\\
&\quad D(x^*, Tx^*), D(T^n x, Tx^*), D(x^*, T^{n+1}x), D(T^{n+2}x, T^n x),\\
&\quad D(T^{n+2}x, T^{n+1}x), D(T^{n+2}x, x^*), D(T^{n+2}x, Tx^*)\big\}. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Cho $n \to \infty$ trong (2.7), sử dụng (2.6) và tính liên tục của D, ta có

$$\begin{aligned}
D(x^*, Tx^*) &\leq K.0 + Kq \max\big\{0, 0, D(x^*, Tx^*), D(x^*, Tx^*), 0, 0, 0, 0, 0\big\}\\
&= KqD(x^*, Tx^*). \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Vì $Kq \in [0; 1)$ nên từ (2.8) ta có $D(x^*, Tx^*) = 0$ hay $x^* = Tx^*$. Vậy T có điểm bất động.

Tiếp theo, ta chứng minh tính duy nhất điểm bất động của T. Giả sử x^*, y^* là hai điểm bất động của T. Từ (2.1) ta có

$$\begin{aligned}
D(x^*, y^*) = D(Tx^*, Ty^*) &\leq q \max\big\{D(x^*, y^*), D(x^*, Tx^*), D(y^*, Ty^*)\\
&\quad D(x^*, Ty^*), D(y^*, Tx^*), D(T^2x^*, x^*), D(T^2x^*, Tx^*),\\
&\quad D(T^2x^*, y^*), D(T^2x^*, Ty^*)\big\}\\
&= qD(x^*, y^*).
\end{aligned}$$

Vì $q \in \left[0; \dfrac{1}{K}\right)$ nên $D(x^*, y^*) = 0$ hay $x^* = y^*$. Do đó, điểm bất động của T là duy nhất.

(2). Với mọi $x \in X$, từ (2.6) ta có $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = x^*$.

(3). Với mọi $x \in X, n \in \mathbb{N}$, cho $m \to \infty$ trong (2.5), sử dụng (2.6) và tính liên tục của D, ta có $D(T^n x, x^*) \leq \dfrac{Kq^n}{1 - Kq} D(x, Tx)$. □

Cho $K = 1$ trong Định lí 2.3 ta được hệ quả sau.

2.4 Hệ quả ([5], Theorem 3.1). *Cho (X, d) là một không gian mêtric và ánh xạ $T\colon X \longrightarrow X$ thỏa mãn*

1. *X là T-quỹ đạo đầy đủ.*
2. *Tồn tại $q \in [0; 1)$ sao cho với mọi $x, y \in X$,*

$$\begin{aligned}
d(Tx, Ty) &\leq q \max\big\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx), d(T^2x, x),\\
&\quad d(T^2x, Tx), d(T^2x, y), d(T^2x, Ty)\big\}.
\end{aligned}$$

Khi đó

1. *T có duy nhất một điểm bất động $x^* \in X$.*

2. *Với mọi $x \in X, n \in \mathbb{N}, \lim\limits_{n\to\infty} T^n x = x^*$.*

3. *Với mọi $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$,*

$$d(T^n x, x^*) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x, Tx).$$

Cuối cùng, chúng tôi giới thiệu ví dụ chứng tỏ Định lí 2.3 tổng quát hơn Hệ quả 2.4.

2.5 Ví dụ. Cho $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ với D xác định như sau

$$D(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \ x = y \\ 3 & \text{nếu } \ (x,y) \in \{(-2,1), (-2,2), (1,-2), (2,-2)\} \\ 1 & \text{trong trường hợp còn lại} \end{cases}$$

và $T : X \longrightarrow X$ xác định bởi

$$T(-2) = T(-1) = T0 = -2, T1 = -1, T2 = 0.$$

Khi đó

1. $\left(X, D, \frac{3}{2}\right)$ là một không gian kiểu-mêtric.

2. Các giả thiết của Định lí 2.3 được thỏa mãn.

3. D không là một mêtric.

Chứng minh. (1). Từ công thức của D ta suy ra điều kiện (1), (2) trong Định nghĩa 1.1 được thỏa mãn. Ta kiểm tra điều kiện thứ (3).

Với mọi $x, y_1, \ldots, y_n, z \in X$, ta xét các trường hợp sau
Nếu $D(x,y) = 0$ thì $D(x,y) = 0 \leq D(x, z_1) + D(z_1, z_2) + \cdots + D(z_n, y)$.
Nếu $D(x,y) = 1$ thì $D(x, z_1) + \cdots + D(z_n, y) \geq 1$. Suy ra

$$D(x,y) \leq D(x, z_1) + \cdots + D(z_n, y).$$

Nếu $D(x,y) = 3$ thì $D(x, z_1) + \cdots + D(z_n, y) \geq 2$. Suy ra

$$D(x,y) \leq \frac{3}{2}[D(x, z_1) + \cdots + D(z_n, y)].$$

Vậy điều kiện (3) trong Định nghĩa 1.1 được thỏa mãn với $K = \frac{3}{2}$. Suy ra $\left(X, D, \frac{3}{2}\right)$ là một không gian kiểu-mêtric.

(2). Trước hết, ta chứng minh D liên tục. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n, x) = \lim\limits_{n\to\infty} D(y_n, y) = 0$. Do đó tồn tại n_0 sao cho $D(x_n, x) < 1$ và $D(y_n, y) < 1$ với mọi $n \geq n_0$. Từ công thức của D suy ra $D(x_n, x) = D(y_n, y) = 0$ hay $x_n = x, y_n = y$ với mọi $n \geq n_0$. Từ đó, suy ra $D(x_n, y_n) = D(x,y)$. Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n, y_n) = D(x,y)$. Vậy D liên tục.

Tiếp theo, ta chứng minh X là T-quỹ đạo đầy đủ. Ta chứng minh $\left(X, D, \frac{3}{2}\right)$ đầy đủ. Giả sử $\{x_n\}$ là một dãy *Cauchy*, ta chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ.

Vì $\{x_n\}$ là một dãy *Cauchy* nên $\lim\limits_{n,m\to\infty} D(x_n, x_m) = 0$. Do đó tồn tại n_0 sao cho $D(x_n, x_m) < 1$ với mọi $m, n \geq n_0$. Suy ra $D(x_n, x_m) = 0$ hay $x_n = x_m$ với mọi $n, m \geq n_0$. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_{n_0}$. Suy ra $\left(X, D, \frac{3}{2}\right)$ đầy đủ. Do đó X là T-quỹ đạo đầy đủ.

Tiếp theo, ta chứng minh (2.1) được thỏa mãn. Ta có
$D(Tx, Ty) = D(-2, -2) = 0$ nếu $x, y \in \{-2, -1, 0\}$.
$D(T(-2), T1) = D(-2, 1) = 1, D(-2, 1) = 3$.
$D(T(-2), T2) = D(-2, 0) = 1, D(-2, 2) = 3$.
$D(T(-1), T1) = D(-2, -1) = 1, D(T^2(-1), 1) = D(T(-2), 1) = D(-2, 1) = 3$.
$D(T(-1), T2) = D(-2, 0) = 1, D(T^2(-1), 2) = D(T(-2), 2) = D(-2, 2) = 3$.
$D(T0, T1) = D(-2, -1) = 1, D(1, T0) = D(1, -2) = 3$.
$D(T0, T2) = D(-2, 0) = 1, D(T^2 0, 2) = D(T0, 2) = D(-2, 2) = 3$.
$D(T1, T2) = D(-1, 0) = 1, D(T^2 1, 2) = D(T(-1), 2) = D(-2, 2) = 3$.
Từ tính toán trên cho thấy (2.1) được thỏa mãn với $q = \frac{1}{3}$.
(3). D không là không gian mêtric vì khi $x = 1, y = -2$ thì

$$D(1, -2) = 3 \geq D(1, 0) + D(0, -2) = 1 + 1 = 2.$$

$\square$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. H. Q. Ái, *Về định lí điểm bất động của lớp ánh xạ Meir-Keeler α-co trên không gian kiểu-mêtric*, Đề tài nghiên cứu khoa học của sinh viên, Trường Đại học Đồng Tháp, 2014.

2. L. B. Ćirić, *A generalization of Banach's contraction principle*, Proc. Amer. Math. Soc. **45** (1974), 267-273.

3. B. N. Giàu, *Suy rộng định lí của Altun cho không gian S-mêtric*, Khóa luận đại học, Trường Đại học Đồng Tháp, 2013.

4. M. A. Khamsi, *Remarks on cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings*, Fixed Point Theory Appl. **2010** (2010), 1-7.

5. P. Kumam, N. V. Dung, and K. Sitthithakerngkiet *A generalization of Ćirić fixed point theorem*, Filomat (2014), accepted paper.

6. N. T. Hieu and V. T. L. Hang, *Coupled fixed point theorems for generalized α-ψ contactive mappings in partially ordered metric-type spaces*, J. Nonlinear Anal. Optim. (2014), submitted paper.

7. N. T. Hieu, N. T. T. Ly, and N. V. Dung, *A generali zation of Ćirić quasi-contractions for maps on S metric spaces*, Thai J. Math. (2014), accepted paper.

8. N. T. A. Nguyệt, *Định lí điểm bất động cho hai ánh xạ thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng trong không gian kiểu-mêtric*, Đề tài nghiên cứu khoa học của sinh viên, Trường Đại học Đồng Tháp, 2014.

9. N. H. Nhi, *Suy rộng định lí của Pant cho không gian S-mêtric*, Khóa luận đại học, Trường Đại học Đồng Tháp, 2013.

10. B. E. Rhoades, *A comparison of various definition of contractive mappings*, Trans. Amer. Math. Soc. **226** (1977), 257 - 290.

11. S. Sessa, *On a weak commultativity condition of mappings in fixed point considerations*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S) **32** (1982), no. 46, 14 - 153.

12. N. C. Tâm, *Về định lí điểm bất động cho dạng φ-co yếu suy rộng trong không gian kiểu-mêtric*, Đề tài nghiên cứu khoa học của sinh viên, Trường Đại học Đồng Tháp, 2014.

13. N. T. T. Trang, *Suy rộng định lí của Wardowski cho không gian S-mêtric*, Khóa luận đại học, Trường Đại học Đồng Tháp, 2013.