ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG CHO HAI ÁNH XẠ TRƠN YẾU TRÊN KHÔNG GIAN KIỂU-MÊTRIC

ThS. Nguyễn Thị Thanh Lý
Khoa SP Toán-Tin, Trường Đại học Đồng Tháp
Email: nguyenthithanhly@.dthu.edu.vn

Tóm tắt. *Trong bài viết này, chúng tôi thiết lập định lí điểm bất động cho hai ánh xạ trơn yếu trên không gian kiểu-mêtric mà không cần tính liên tục của kiểu-mêtric. Các kết quả này là cải tiến các kết quả trong [7] trên không gian kiểu-mêtric.*

1 Mở đầu

Năm 2011, Akkouchi [2] đã giới thiệu định lí điểm bất động cho các ánh xạ trơn yếu trên không gian mêtric. Gần đây, các kết quả này đã được nghiên cứu trên không gian kiểu-mêtric [7]. Tuy nhiên, giả thiết của định lí cần điều kiện liên tục của kiểu-mêtric. Trong bài viết này, chúng tôi cải tiến các kết quả trong [7] trên không gian kiểu-mêtric bằng cách giảm bớt giả thiết liên tục của kiểu-mêtric.

Trước hết, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả bổ trợ cho nội dung chính của bài viết.

Định nghĩa 1.1 ([6], Definition 2.7)**.** Cho X là tập khác rỗng, $K \geq 1$ và hàm $D : X \times X \to [0, +\infty)$ sao cho với mọi $x, y, y_1, y_2, \dots, y_n, z \in X$,

(1) $D(x, y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$.

(2) $D(x, y) = D(y, x)$.

(3) $D(x, z) \leq K[D(x, y_1) + D(y_1, y_2) + \cdots + D(y_n, z)]$.

Khi đó D được gọi là *kiểu-mêtric* trên X và (X, D, K) được gọi là *không gian kiểu-mêtric.*

Định nghĩa 1.2 ([6])**.** Cho (X, D, K) là không gian kiểu-mêtric.

(1) Dãy $\{x_n\}$ trong X được gọi là *hội tụ đến* $x \in X$, kí hiệu $x_n \to x$ hay $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} D(x_n, x) = 0$. Khi đó x được gọi là *điểm giới hạn* của dãy $\{x_n\}$.

(2) Dãy $\{x_n\}$ trong X được gọi là *dãy Cauchy* nếu $\lim\limits_{n,m\to+\infty} D(x_n, x_m) = 0$.

(3) Không gian (X, D, K) được gọi là *đầy đủ* nếu mỗi dãy Cauchy là một dãy hội tụ.

Bổ đề 1.3. *Cho (X, D, K) là không gian kiểu-mêtric và $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ là hai dãy trong X thỏa mãn $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$. Khi đó,*

1. $\dfrac{1}{K} D(a, b) \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} D(x_n, y_n) \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} D(x_n, y_n) \leq K D(a, b)$.

2. $\dfrac{1}{K} D(a, y) \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} D(x_n, y) \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} D(x_n, y) \leq K D(a, y)$, *với mọi* $y \in X$.

Chứng minh. (1) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có các bất đẳng thức sau

$$D(a,b) \le K\Big[D(a,x_n) + D(x_n,y_n) + D(y_n,b)\Big] \quad \text{và}$$

$$D(x_n,y_n) \le K\Big[D(x_n,a) + D(a,b) + D(b,y_n)\Big].$$

Từ đó suy ra $D(a,b) \le K \liminf\limits_{n\to+\infty} D(x_n,y_n)$ và $\limsup\limits_{n\to+\infty} D(x_n,y_n) \le KD(a,b)$. Vậy $\dfrac{1}{K}D(a,b) \le \liminf\limits_{n\to+\infty} D(x_n,y_n) \le \limsup\limits_{n\to+\infty} D(x_n,y_n) \le KD(a,b)$.

(2) Chứng minh tương tự. □

Định nghĩa 1.4 ([3])**.** Cho tập X khác rỗng và hai ánh xạ $S,\ T : X \to X$.

1. Điểm $x \in X$ được gọi là *điểm trùng* của S và T nếu $Tx = Sx$.
2. Điểm $y \in X$ được gọi là *giá trị trùng* của S và T nếu tồn tại điểm trùng $x \in X$ của S và T sao cho $y = Tx = Sx$.
3. Hai ánh xạ S và T được gọi là *tương thích yếu ngẫu nhiên* nếu tồn tại $x \in X$ là điểm trùng của S và T và $STx = TSx$.

Bổ đề 1.5 ([5])**.** *Cho X là tập khác rỗng và S, T là hai ánh xạ tương thích yếu ngẫu nhiên trên tập X. Khi đó, nếu S và T có duy nhất một giá trị trùng $w = Sx = Tx$ thì w là điểm bất động chung duy nhất của S và T.*

Bổ đề 1.6 ([7], Bổ đề 1.10)**.** *Cho (X, D, K) là không gian kiểu-mêtric và $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ là hai dãy trong X. Nếu $\{x_n\}$ là dãy Cauchy và $\lim\limits_{n\to+\infty} D(x_n,y_n) = 0$ thì $\{y_n\}$ là dãy Cauchy. Hơn nữa, nếu $x_n \to z$ thì $y_n \to z$.*

Định nghĩa 1.7 ([7], Định nghĩa 2.1)**.** Cho (X, D, K) là không gian kiểu-mêtric và $F, T : X \to X$ là hai ánh xạ. Khi đó

(1) F và T được gọi là *trơn yếu* nếu tồn tại dãy $\{x_n\}$ trong X sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} D(Fx_n, Tx_n) = 0$.

(2) Bài toán điểm bất động chung của $\{F, T\}$ được gọi là *đặt chỉnh* nếu

(a) F và T có duy nhất điểm bất động chung x trong X, tức là, tồn tại duy nhất điểm $x \in X$ sao cho $Fx = Tx = x$.

(b) Với mỗi dãy $\{x_n\}$ trong X, nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} D(x_n, Fx_n) = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} D(x_n, Tx_n)$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} D(x_n, x) = 0$.

2 Kết quả chính

Định lí 2.1. *Cho (X, D, K) là không gian kiểu-mêtric; $F, T : X \to X$ là hai ánh xạ và $\Phi : [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ là hàm số thỏa mãn các điều kiện*

(1) $F(X)$ là không gian con đầy đủ của X.

(2) Φ liên tục và $\Phi(t,0) = 0 = \Phi(0,t)$ với mọi $t \in [0,+\infty)$

(3) Tồn tại các hằng số $M > 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1)$ sao cho với mọi $x, y \in X$,

$$\begin{aligned} D(Tx, Ty) \quad &\leq \quad a_0(x,y)\Phi\Big(D(Fx,Tx), D(Fy,Ty)\Big) + \frac{1}{K}\Big[a_1(x,y)D(Fx,Fy) \\ &\qquad + a_2(x,y)\Big(D(Fx,Tx) + D(Fy,Ty)\Big) + \frac{a_3(x,y)}{K}\Big(D(Fx,Ty) + D(Fy,Tx)\Big)\Big] \end{aligned}$$

trong đó $a_i = a_i(x, y)$, $i = 0, 1, 2, 3$ là các hàm số không âm và

$$\begin{aligned} a_0(x,y) \quad &\leq \quad M \\ a_2(x,y) + a_3(x,y) \quad &\leq \quad \lambda_1 \\ a_1(x,y) + 2\frac{a_3(x,y)}{K} \quad &\leq \quad \lambda_2. \end{aligned}$$

(4) F, T trơn yếu và tương thích yếu ngẫu nhiên.

Khi đó

(1) F và T có duy nhất điểm bất động chung trong X.

(2) Bài toán điểm bất động chung của F, T có tính đặt chỉnh (well-posedness).

(3) Nếu F liên tục tại điểm bất động chung thì T cũng liên tục tại điểm đó.

Chứng minh. (1) Vì F và T trơn yếu nên tồn tại dãy $\{x_n\}$ trong X sao cho

$$\lim_{n\to\infty} D(Fx_n, Tx_n) = 0. \tag{1}$$

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, đặt $y_n = Tx_n$ và $z_n = Fx_n$. Ta sẽ chứng minh $\{y_n\}$ và $\{z_n\}$ là các dãy Cauchy. Sử dụng giả thiết (3), ta có

$$\begin{aligned} D(y_n, y_m) \quad &= \quad D(Tx_n, Tx_m) \\ &\leq \quad a_0(x_n,x_m)\Phi\Big(D(Fx_n,Tx_n), D(Fx_m,Tx_m)\Big) + \frac{1}{K}\Big[a_1(x_n,x_m)D(Fx_n,Fx_m) \\ &\qquad + a_2(x_n,x_m)\Big(D(Fx_n,Tx_n) + D(Fx_m,Tx_m)\Big) \\ &\qquad + \frac{a_3(x,y)}{K}\Big(D(Fx_n,Tx_m) + D(Fx_m,Tx_n)\Big)\Big] \\ &\leq \quad a_0(x_n,x_m)\Phi\Big(D(Fx_n,Tx_n), D(Fx_m,Tx_m)\Big) \\ &\qquad + a_1(x_n,x_m)\Big(D(Fx_n,Tx_n) + D(Tx_n,Tx_m) + D(Tx_m,Fx_m)\Big) \\ &\qquad + \frac{a_2(x_n,x_m)}{K}\Big(D(Fx_n,Tx_n) + D(Fx_m,Tx_m)\Big) \\ &\qquad + \frac{a_3(x,y)}{K}\Big(D(Fx_n,Tx_n) + D(Tx_n,Tx_m) + D(Fx_m,Tx_m) + D(Tx_m,Tx_n)\Big) \\ &= \quad a_0(x_n,x_m)\Phi\Big(D(z_n,y_n), D(z_m,y_m)\Big) + \Big(a_1(x_n,x_m) + 2\frac{a_3(x,y)}{K}\Big)D(y_n,y_m) \\ &\qquad + \Big(a_1(x_n,x_m) + \frac{a_2(x_n,x_m)}{K} + \frac{a_3(x,y)}{K}\Big)\Big(D(z_n,y_n) + D(y_m,z_m)\Big) \\ &\leq \quad M\Phi\Big(D(z_n,y_n), D(z_m,y_m)\Big) + \lambda_2 D(y_n,y_m) + (\lambda_1+\lambda_2)\Big(D(z_n,y_n) + D(y_m,z_m)\Big). \end{aligned}$$

Vì vậy,

$$0 \leq (1-\lambda_2)D(y_n,y_m) \leq M\Phi\Big(D(z_n,y_n), D(z_m,y_m)\Big) + (\lambda_1+\lambda_2)\Big(D(z_n,y_n) + D(y_m,z_m)\Big).$$

Cho $n, m \to +\infty$ trong bất đẳng thức trên, sử dụng (1) và điều kiện Φ liên tục tại $(0,0)$, ta được

$$\lim_{n,m\to+\infty} D(y_n, y_m) = 0. \tag{2}$$

Do đó $\{y_n\}$ là dãy Cauchy. Sử dụng Bổ đề 1.6 và (2) ta được $\{z_n\}$ là dãy Cauchy. Vì $F(X)$ đầy đủ nên tồn tại $y = Fv \in F(X)$, $v \in X$ sao cho

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} z_n = y = Fv. \tag{3}$$

Tiếp theo ta sẽ chứng minh y là giá trị trùng duy nhất của F và T. Trước hết, ta chứng minh $Tv = Fv$, tức là, $D(Fv, Tv) = 0$. Thật vậy, sử dụng giả thiết (3), ta có

$$\begin{aligned}
& D(Tx_n, Tv) \\
\le\ & a_0(x_n, v)\Phi\Big(D(Fx_n, Tx_n), D(Fv, Tv)\Big) + \frac{1}{K}\Big[a_1(x_n, v).D(Fx_n, Fv) \\
& + a_2(x_n, v)\Big(D(Fx_n, Tx_n) + D(Fv, Tv)\Big) + \frac{a_3(x,y)}{K}(D(Fx_n, Tv) + D(Fv, Tx_n))\Big] \\
\le\ & a_0(x_n, v)\Phi\Big(D(Fx_n, Tx_n), D(Fv, Tv)\Big) + \frac{a_1(x_n, v)}{K} D(Fx_n, Fv) \\
& + \frac{a_2(x_n, v)}{K}\Big(D(Fx_n, Tx_n) + D(Fv, Tv)\Big) + \frac{a_3(x,y)}{K}\Big(D(Tv, Fv) + D(Fv, Fx_n)\Big) \\
& + \frac{a_3(x_n, v)}{K^2} D(Tx_n, Fv).
\end{aligned}$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}
D(y_n, Tv) &\le a_0(x_n, v)\Phi\Big(D(z_n, y_n), D(y, Tv)\Big) + \Big(\tfrac{a_1(x_n,v)}{K} + \tfrac{a_3(x,y)}{K}\Big) D(z_n, y) \\
&\quad + \tfrac{a_2(x_n,v)}{K} D(z_n, y_n) + \Big(\tfrac{a_2(x_n,v)}{K} + \tfrac{a_3(x,y)}{K}\Big) D(y, Tv) + \tfrac{a_3(x_n,v)}{K^2} D(y_n, y) \\
&\le M\Phi\Big(D(z_n, y_n), D(y, Tv)\Big) + \lambda_2 D(z_n, y) + \lambda_1 D(z_n, y_n) + \tfrac{\lambda_1}{K} D(y, Tv) + \lambda_1 D(y_n, y).
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to+\infty} D(y_n, Tv) \le\ & M\Phi\Big(\limsup_{n\to+\infty} D(z_n, y_n), \limsup_{n\to+\infty} D(y, Tv)\Big) + \lambda_2 \limsup_{n\to+\infty} D(z_n, y) \\
& + \lambda_1 \limsup_{n\to+\infty} D(z_n, y_n) + \frac{\lambda_1}{K} \limsup_{n\to+\infty} D(y, Tv) + \lambda_1 \limsup_{n\to+\infty} D(y_n, y).
\end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề 1.3 trong bất đẳng thức trên, ta được

$$\frac{1}{K} D(y, Tv) \le \frac{\lambda_1}{K} D(y, Tv).$$

Vì $\lambda_1 \in [0, 1)$ nên $D(y, Tv) = 0$, tức là $D(Fv, Tv) = 0$. Do đó, $y = Tv = Fv$ hay v là điểm trùng của F và T.

Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng nếu tồn tại $z \in X$ sao cho $z = Tu = Fu$ với

$u \in X$ thì $z = y$. Thật vậy, từ giả thiết (2) và giả thiết (3) ta có

$$\begin{aligned}
&D(y,z) = D(Tv,Tu)\\
\leq\ & a_0(v,u)\Phi\Big(D(Fv,Tv),D(Fu,Tu)\Big) + \frac{1}{K}\Big[a_1(v,u)D(Fv,Fu)\\
&+a_2(v,u)\Big(D(Fv,Tv)+D(Fu,Tu)\Big) + \frac{a_3(v,u)}{K}\Big(D(Fv,Tu)+D(Fu,Tv)\Big)\Big]\\
=\ & \frac{1}{K}\Big(a_1(v,u)+2\frac{a_3(v,u)}{K}\Big)D(y,z)\\
\leq\ & \lambda_2 D(y,z).
\end{aligned}$$

Vì $\lambda_2 \in [0,1)$ nên $D(y,z) = 0$, tức là $y = z$. Vậy y là giá trị trùng duy nhất của F và T. Tiếp tục sử dụng Bổ đề 1.5 ta được y là điểm bất động chung duy nhất của F và T.

(2) Gọi y là điểm bất động chung duy nhất của F và T. Giả sử dãy $\{x_n\}$ trong X thỏa mãn

$$\lim_{n\to+\infty} D(x_n,Tx_n) = 0 = \lim_{n\to+\infty} D(x_n,Fx_n). \tag{4}$$

Ta cần chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty} D(x_n,y) = 0$. Thật vậy, ta có

$$0 \leq D(Tx_n,Fx_n) \leq \frac{1}{K}\Big[D(Tx_n,x_n)+D(x_n,Fx_n)\Big].$$

Cho $n \to +\infty$ trong bất đẳng thức trên và sử dụng (4), ta được

$$\lim_{n\to+\infty} D(Tx_n,Fx_n) = 0. \tag{5}$$

Tương tự như trong chứng minh (1), với mỗi $n \in \mathbb{N}$, đặt $y_n = Tx_n$ và $z_n = Fx_n$. Khi đó $\{y_n\}$ và $\{z_n\}$ là hai dãy Cauchy. Vì $F(X)$ đầy đủ nên tồn tại $x = Fv$, $v \in X$ sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = x$. Sử dụng (5) và Bổ đề 1.6, ta được

$$\lim_{n\to+\infty} Tx_n = \lim_{n\to+\infty} Fx_n = x. \tag{6}$$

Tương tự như trong chứng minh của (1), ta có x là điểm bất động chung duy nhất của F và T. Điều này suy ra $x = y$. Sử dụng (4), (5) và Bổ đề 1.6, ta được $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = y$ hay $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n,y) = 0$.

(3) Gọi y là điểm bất động chung duy nhất của F và T. Với mỗi dãy $\{u_n\}$ mà $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = y$, ta cần chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty} Tu_n = Ty$. Thật vậy, từ giả thiết (3) và giả thiết (2), ta có

$$\begin{aligned}
&D(Tu_n,y) = D(Tu_n,Ty)\\
\leq\ & a_0(u_n,y)\Phi\Big(D(Fu_n,Tu_n),D(Fy,Ty)\Big) + \frac{1}{K}\Big[a_1(u_n,y)D(Fu_n,Fy)\\
&+a_2(u_n,y)\Big(D(Fu_n,Tu_n)+D(Fy,Ty)\Big) + \frac{a_3(v,u)}{K}\Big(D(Fu_n,Ty)+D(Fy,Tu_n)\Big)\Big]\\
=\ & a_0(u_n,y)\Phi\Big(D(Fu_n,Tu_n),D(y,y)\Big) + \frac{1}{K}\Big[a_1(u_n,y)D(Fu_n,y)\\
&+a_2(u_n,y)\Big(D(Fu_n,Tu_n)+D(y,y)\Big) + \frac{a_3(v,u)}{K}\Big(D(Fu_n,y)+D(y,Tu_n)\Big)\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{K}\Big(a_1(u_n,y)+\frac{a_3(v,u)}{K}\Big)D(Fu_n,y)+\frac{a_2(u_n,y)}{K}D(Fu_n,Tu_n)+\frac{a_3(u_n,y)}{K^2}D(y,Tu_n)\\
&\le \frac{1}{K}\Big(a_1(u_n,y)+\frac{a_3(v,u)}{K}\Big)D(Fu_n,y)\\
&\quad +a_2(u_n,y)\Big(D(Fu_n,y)+D(y,Tu_n)\Big)+\frac{a_3(u_n,y)}{K^2}D(y,Tu_n)\\
&\le (\frac{a_1(u_n,y)}{K}+\frac{a_3(u_n,y)}{K^2}+a_2(u_n,y))D(Fu_n,y)+\Big(a_2(u_n,y)+\frac{a_3(u_n,y)}{K^2}\Big)D(y,Tu_n)\\
&\le \Big(\lambda_1+\lambda_2\Big)D(Fu_n,y)+\lambda_1 D(y,Tu_n).
\end{aligned}$$

Điều này dẫn đến

$$0 \le (1-\lambda_1)D(Tu_n,y) \le (\lambda_1+\lambda_2)D(Fu_n,y). \tag{7}$$

Cho $n \to +\infty$ trong (7) và sử dụng tính liên tục của F tại y, ta được $\lim\limits_{n\to+\infty} D(Tu_n,y) = 0$. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} Tu_n = y$ hay $\lim\limits_{n\to+\infty} Tu_n = Ty$. □

Hệ quả 2.2. *Cho (X,D,K) là không gian kiểu-mêtric và $F,T : X \to X$ là hai ánh xạ thỏa mãn các điều kiện sau*

(1) $F(X)$ là không gian con đầy đủ của X.

(2) Tồn tại $\alpha \ge 0$, $\beta \in [0,1)$ sao cho với mọi $x,y \in X$,
$$D(Tx,Ty) \le \alpha\frac{\min\{D(Fx,Tx),D(Fy,Ty)\}+D(Fx,Tx)D(Fy,Ty)}{1+D(x,y)}+\frac{\beta}{K}D(Fx,Fy).$$

(3) F,T trơn yếu và tương thích yếu ngẫu nhiên.

Khi đó

(1) F và T có duy nhất điểm bất động chung trong X.

(2) Bài toán điểm bất động chung của $\{T,F\}$ có tính đặt chỉnh.

(3) Nếu F liên tục tại điểm bất động chung thì T cũng liên tục tại điểm đó.

Hệ quả 2.3. *Cho (X,D,K) là không gian kiểu-mêtric và $F,T : X \to X$ là hai ánh xạ thỏa mãn các điều kiện sau*

(1) $F(X)$ là không gian con đầy đủ của X.

(2) Tồn tại $p,q,r \ge 0, p+r<1, p+\frac{2r}{K}<1$sao cho với mọi $x,y \in X$,

$$\begin{aligned}
D(Tx,Ty) &\le \frac{p}{K}D(Fx,Fy)+\frac{q}{K}\Big[D(Fx,Tx)+D(,Fy,Ty)\Big]\\
&\quad+\frac{r}{K^2}\Big[D(Fx,Ty)+D(Fy,Tx)\Big].
\end{aligned}$$

(3) F,T trơn yếu và tương thích yếu ngẫu nhiên.

Khi đó

(1) F và T có duy nhất điểm bất động chung trong X

(2) Bài toán điểm bất động chung của F, T có tính đặt chỉnh;

(3) Nếu F liên tục tại điểm bất động chung thì T cũng liên tục tại điểm đó.

Nhận xét 2.4. *Từ Định lí 2.1,Hệ quả 2.2 và Hệ quả 2.3, nếu chọn $K = 1$ thì ta được kết quả chính trong [2].*

Sau đây, chúng tôi trình bày ví dụ về điểm bất động cho ánh xạ trơn yếu trên không gian kiểu-mêtric (X, D, K) trong đó D không liên tục và cũng không là một mêtric. Dó đó, các kết quả trong [2] và [7] không áp dụng được cho ví dụ này.

Ví dụ 2.5. *Cho $X = \{0, 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$, hàm D được định nghĩa như sau*

$$D(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x = y \\ 1 & \text{nếu } x \neq y \in \{0,1\} \\ |x-y| & \text{nếu } x \neq y \in \{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{m}\}, m, n \geq 2 \\ \frac{1}{3} & \text{nếu } x \neq y \in \{1, \frac{1}{n}\}, n \geq 2, \end{cases}$$

và hai ánh xạ $F, T : X \to X$ được xác định bởi

$$T0 = T1 = 0, T\frac{1}{n} = \frac{1}{6n}, F0 = F1 = 0, F\frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$

với mọi $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Khi đó,

(1) D là một kiểu-mêtric không liên tục với $K = 3$. Hơn nữa, D không là một mêtric trên X.

(2) Định lí 2.1 áp dụng được cho bài toán này.

Chứng minh. (1) Xem [4, Example 2.2].
(2) Ta có $D(Tx, Ty) = \frac{1}{6}D(Fx, Fy)$ với mọi $x, y \in X$. Do đó, chọn $\Phi(s,t) = st$ với mọi $s, t \geq 0$ và $M = 1, \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}, a_1(x,y) = \frac{1}{2}, a_0(x,y) = a_2(x,y) = a_3(x,y) = 0$ với mọi $x, y \in X$ thì giả thiết (3) của Định lí 2.1 được thỏa mãn. Hơn nữa, các giả thiết còn lại của Định lí 2.1 cũng được thỏa mãn nên Định lí 2.1 áp dụng được cho bài toán này. □

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. A. Aghaiani, M. Abbas, and J. R. Roshan, *Common fixed point of generalized weak contractive mapping in partially order b-metric spaces,* Math. Slovaca, (2014) 64(4), 941-960.

2. M. Akkouchi, *Well-posedness of a common fixed point problem for weakly tangential mappings*, Acta Math. Vietnamica (2011)36, no 3, 623-635.

3. M. A. Al-Thagafi and N. Shahzad, *Generalized I-nonexpansive self maps and invariant approximations*, Acta Math. Sinica (2008) 24, no.5, 867-876.

4. N. T. Hieu, and V. T. L. Hang, *Coupled fixed point theorems for generalized $\alpha-\psi-$contractive mappings in partially ordered metric-type spaces*, J. Nonlinear Anal. Optim. (2013), submitted.

5. G. Jungck and B. E. Rhoades, *Fixed point theorems for occasionally weakly compatible mappings*, Fixed Point Theory 7 (2006), no. 2, 287-296.

6. M. A. Khamsi, *Remarks on cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings*, Fixed Point Theory Appl. (2010) 2010, 1-7.

7. N. T. T. Lý và N. V. Dũng , *Định lí điểm bất động cho ánh xạ trơn trên không gian kiểu-mêtric*, Tạp chí Đại học Công nghệ Sài Gòn (2014), bài báo gửi đăng.