ĐẠO HÀM PHẢN XỨNG VÀ MỞ RỘNG KÉP CỦA ĐẠI SỐ LIE TOÀN PHƯƠNG

ThS. Nguyễn Thị Mộng Tuyền
Khoa Sư phạm Toán -Tin, Trường Đại học Đồng Tháp
Email: ntmtuyen@dthu.edu.vn

Tóm tắt. *Trong bài viết này, chúng tôi phát biểu lại khái niệm mở rộng kép và đạo hàm phản xứng của đại số Lie toàn phương. Cuối cùng, chúng tôi đưa ra một số ví dụ về tính đạo hàm phản xứng của một đại số Lie toàn phương thấp chiều, và mở rộng kép của đại số Lie toàn phương thấp chiều bởi một đạo hàm phản xứng của nó.*

1 Mở đầu

Cho $\mathcal{G}$ là đại số Lie toàn phương. Một bài toán nổi tiếng trong lí thuyết của các đại số Lie toàn phương trên một trường đóng đại số $\mathbb{F}$ là phân loại chúng. Bài toán này được nghiên cứu mạnh mẽ trong nhiều công trình. Cụ thể, bài toán phân loại được bắt đầu nghiên cứu trên các đại số Lie toàn phương lũy linh số chiều nhỏ hơn hoặc bằng 7 trong (xem [4]) và gần đây hơn, Kath đã phân loại các đại số Lie toàn phương lũy linh thực đến 10 chiều (xem [6]). Trường hợp không giải được, các đại số Lie thực đến 9 chiều đã được phân loại bởi Campoamor và Stursberg, và đến 13 chiều trong một công trình [1] gần đây. Tuy nhiên phân loại các đại số Lie toàn phương giải được không lũy linh là không tầm thường và chúng đã được phân loại đến 8 chiều (xem [5]). Điều này là động cơ thúc đẩy chúng tôi cố gắng phân loại các đại số Lie với số chiều cao hơn. Công cụ chính để giải quyết bài toán này là mở rộng kép của đại số Lie toàn phương bởi một đạo hàm phản xứng của chúng.

2 Nội dung nghiên cứu

2.1 Mở đầu về đại số Lie và đại số Lie toàn phương

2.1.1 Đại số Lie

Định nghĩa 2.1. *Cho $\mathcal{G}$ là một không gian véctơ trên trường $\mathbb{C}$. Ta gọi $\mathcal{G}$ là một đại số Lie nếu trên $\mathcal{G}$ được trang bị phép toán (gọi là tích Lie)*

$$\begin{aligned}[.,.] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G}\\ (X,Y) &\longmapsto [X,Y]\end{aligned}$$

thỏa mãn các điều kiện sau:

1. *Phép toán $[.,.]$ là một ánh xạ song tuyến tính;*

2. *Phép toán $[.,.]$ là phản xứng, tức là $[X,X] = 0$ với mọi $X \in \mathcal{G}$;*

3. *$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$ với mọi $X, Y, Z \in \mathcal{G}$ (đồng nhất Jacobi).*

Số chiều của đại số Lie $\mathcal{G}$ là số chiều của không gian véctơ $\mathcal{G}$. Nếu $[X,Y] = 0, \forall X, Y \in \mathcal{G}$ thì $\mathcal{G}$ được gọi là đại số Lie giao hoán.

Định nghĩa 2.2. *Cho đại số Lie $\mathcal{G}$. Một không gian véctơ con A của $\mathcal{G}$ được gọi là một đại số Lie con của $\mathcal{G}$ nếu $[X,Y] \in A$ với mọi $X, Y \in A$.*

Định nghĩa 2.3. *Cho đại số Lie $\mathcal{G}$. Một không gian véc tơ con I của $\mathcal{G}$ được gọi là một ideal của $\mathcal{G}$ nếu $[X, Y] \in I$ với mọi $X \in \mathcal{G}, Y \in I$.*

Cho đại số Lie $\mathcal{G}$, ta kí hiệu $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] = \{[X, Y] \mid X, Y \in \mathcal{G}\}$ được gọi là đại số dẫn xuất của đại số Lie $\mathcal{G}$ và là một ideal của $\mathcal{G}$. Kí hiệu $Z(\mathcal{G}) = \{X \in \mathcal{G} \mid [X, Y] = 0, \forall Y \in \mathcal{G}\}$ là ideal tâm của $\mathcal{G}$.

Định nghĩa 2.4. *Cho $\mathcal{G}_1$ và $\mathcal{G}_2$ là hai đại số Lie trên trường $\mathbb{C}$. Khi đó ánh xạ tuyến tính $\varphi : \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_2$ được gọi là một đồng cấu đại số Lie nếu bảo toàn tích Lie, tức là $\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]$ với mọi $X, Y \in \mathcal{G}_1$.*

2.1.2 Đại số Lie toàn phương

Định nghĩa 2.5. ([3]) *Cho một không gian véctơ phức $\mathcal{G}$. Một dạng song tuyến tính $B : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{C}$ được gọi là*

1. *đối xứng nếu $B(X, Y) = B(Y, X)$ với mọi $X, Y \in \mathcal{G}$;*
2. *không suy biến nếu $B(X, Y) = 0$ với mọi $Y \in \mathcal{G}$ thì $X = 0$;*
3. *bất biến (hay còn gọi là kết hợp) nếu*

$$B([X, Y], Z) = B(X, [Y, Z]), \forall X, Y, Z \in \mathcal{G}.$$

Một đại số Lie $\mathcal{G}$ trên đó tồn tại một dạng song tuyến tính đối xứng, không suy biến và bất biến được gọi là một đại số Lie toàn phương. Kí hiệu $(\mathcal{G}, B)$.

Ví dụ 2.6. *Một số ví dụ về đại số Lie toàn phương*

1. *Trong $\mathbb{R}^3$ với tích Lie là tích có hướng, dạng toàn phương là tích vô hướng.*
2. *Cho $\mathcal{G} = Span\{X, Y\}$ trong đó tích Lie cho bởi $[X, Y] = 0$. Dạng song tuyến tính đối xứng, không suy biến và bất biến B của $\mathcal{G}$ cho bởi $B(X, Y) = 1$, các trường hợp còn lại bằng 0. Khi đó $(\mathcal{G}, B)$ là đại số Lie toàn phương giao hoán 2-chiều.*
3. *Cho $\mathcal{G} = Span\{X, P, Q, Z\}$ trong đó tích Lie cho bởi $[X, P] = P, [X, Q] = -Q, [P, Q] = Z$, các trường hợp còn lại là tầm thường ($\mathcal{G}$ là đại số Lie kim cương). Dạng song tuyến tính đối xứng, không suy biến và bất biến B của $\mathcal{G}$ cho bởi $B(X, Z) = B(P, Q) = 1$, các trường hợp còn lại bằng 0. Khi đó $(\mathcal{G}, B)$ là đại số Lie toàn phương 4-chiều.*

Định nghĩa 2.7. ([3]) *Cho đại số Lie toàn phương $(\mathcal{G}, B)$ và V là một không gian véctơ con của $\mathcal{G}$, khi đó ta định nghĩa thành phần trực giao của V là*

$$V^{\perp} = \{X \in \mathcal{G} \mid B(X, Y) = 0, \forall Y \in V\}.$$

Một phần tử $X \in \mathcal{G}$ được gọi là tự đẳng hướng nếu $B(X, X) = 0$. Một không gian con V của $\mathcal{G}$ được gọi là tự đẳng hướng hoàn toàn nếu $B(X, Y) = 0, \forall X, Y \in V$. Trong trường hợp này, hiển nhiên ta có $V \subset V^{\perp}$. Từ đó chúng ta có định nghĩa về đại số Lie rút gọn như sau:

Định nghĩa 2.8. ([3]) *Một đại số Lie toàn phương $\mathcal{G}$ khác $\{0\}$ được gọi là một đại số Lie rút gọn nếu tâm tự đẳng hướng hoàn toàn.*

Từ tính chất bất biến và không suy biến của dạng song tuyến tính xác định trên $\mathcal{G}$, ta dễ dàng chứng minh được $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] = Z(\mathcal{G})^{\perp}$. Do đó $Z(\mathcal{G})$ tự đẳng hướng hoàn toàn khi và chỉ khi $Z(\mathcal{G}) \subset [\mathcal{G}, \mathcal{G}]$.

2.2 Đạo hàm phản xứng và mở rộng kép của một đại số Lie toàn phương

2.2.1 Đạo hàm phản xứng của đại số Lie toàn phương

Định nghĩa 2.9. ([3]) *Cho $(\mathcal{G}, B)$ là một đại số Lie toàn phương. Ánh xạ tuyến tính $D : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ được gọi là một đạo hàm của $\mathcal{G}$ nếu*

$$D([X,Y]) = [D(X),Y] + [X,D(Y)], \forall X,Y \in \mathcal{G}.$$

Nếu thêm điều kiện

$$B(D(X),Y) = -B(X,D(Y)), \forall X,Y \in \mathcal{G}$$

thì ta nói D là một đạo hàm phản xứng của $\mathcal{G}$.

Từ tính chất bất biến của dạng song tuyến tính, các đạo hàm trong của một đại số Lie toàn phương đều là đạo hàm phản xứng. Tuy nhiên điều ngược lại không đúng, ví dụ có thể tìm được trong mệnh đề 2.10 và các ví dụ 2.14, 2.15.
Sau đây là một số mệnh đề về cách tính ma trận phản xứng của một số đại số Lie toàn phương.

Mệnh đề 2.10. *Cho $\mathcal{G}$ là đại số Lie kim cương. Gọi D là đạo hàm phản xứng của $\mathcal{G}$. Khi đó ma trận biểu diễn của D đối với cơ sở $\{X,P,Q,Z\}$ được xác định như sau:*

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ y & a & 0 & 0 \\ z & 0 & -a & 0 \\ 0 & -z & -y & 0 \end{bmatrix}.$$

Chứng minh. Đại số Lie kim cương $\mathcal{G} = Span\{X,P,Q,Z\}$ trong đó tích Lie cho bởi $[X,P] = P, [X,Q] = -Q, [P,Q] = Z$, các trường hợp còn lại là tầm thường. Dạng song tuyến tính đối xứng B cho bởi $B(X,Z) = B(P,Q) = 1$, các trường hợp còn lại bằng 0.
Do $Z(\mathcal{G}) = \mathbb{C}.Z$ là không gian con ổn định với D, tức là $D(Z(\mathcal{G})) \subset Z(\mathcal{G})$. Nên ta có thể giả sử $D(Z) = xZ, x \in \mathbb{C}$. Vì D phản xứng nên ta có:

$$B(D(X),Z) = -B(X,D(Z)) = -B(X,xZ) = -x.$$

Do đó $D(X) = -xX + yP + zQ + wZ, x,y,z,w \in \mathbb{C}$. Do $[\mathcal{G},\mathcal{G}]$ cũng là một không gian con ổn định đối với D nên $D(P) = aP + bQ + cZ$ và $D(Q) = a'P + b'Q + c'Z$ với $a,b,c,a',b',c' \in \mathbb{C}$.
Ta có $D(P) = D([X,P]) = [D(X),P] + [X,D(P)]$. Suy ra $x = b = 0$ và $c = -z$. Tương tự đối với $D(Q)$, ta nhận được $c' = -y, a' = 0$.
Dựa vào tính chất phản xứng của D, ta có $B(D(X),X) = 0$, hay $w = 0$. Tương tự $B(D(P),Q) = -B(P,D(Q))$, suy ra $a = -b'$. Cuối cùng ta thu được $D(X) = yP + zQ, D(P) = aP - zZ, D(Q) = -aQ - yZ, D(Z) = 0$.
Do đó ta có ma trận của D đối với cơ sở $\{X,P,Q,Z\}$ là

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ y & a & 0 & 0 \\ z & 0 & -a & 0 \\ 0 & -z & -y & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Mệnh đề 2.11. *Cho $\mathcal{G}$ là đại số Lie kim cương. Đặt $\mathcal{H} = \mathcal{G} \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{C}.Y$, trên $\mathcal{H}$ tích Lie cho bởi $[X,P] = P, [X,Q] = -Q, [P,Q] = Z$, các trường hợp còn lại là tầm thường và dạng song tuyến tính B cho bởi $B(X,Z) = B(P,Q) = B(Y,Y) = 1$, các trường hợp còn lại bằng 0. Gọi D là* *đạo hàm phản xứng của $\mathcal{H}$. Khi đó ma trận biểu diễn của D đối với cơ sở $\{X,P,Q,Z,Y\}$ được xác định như sau:*

$$D=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\ y&a&0&0&0\\ z&0&-a&0&0\\ 0&-z&-y&0&t\\ -t&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Chứng minh. Vì $\mathcal{H}=\mathcal{G}\overset{\perp}{\oplus}\mathbb{C}.Y$, tích Lie cho bởi $[X,P]=P,[X,Q]=-Q,[P,Q]=Z$, các trường hợp còn lại là tầm thường. Dạng song tuyến tính đối xứng B cho bởi $B(X,Z)=B(P,Q)=B(Y,Y)=1$, các trường hợp còn lại bằng 0. Nên dể dàng chứng minh được $\mathcal{H}$ là một đại số Lie toàn phương và $\mathcal{H}=Span\{X,P,Q,Z,Y\}$.
Do $Z(\mathcal{G})=\mathbb{C}.Z+\mathbb{C}.Y$ là không gian con ổn định đối với D, tức là $D(Z(\mathcal{G}))\subset Z(\mathcal{G})$. Nên $D(Z)=xZ+x'Y,D(Y)=tZ+t'Y,x,x',t,t'\in\mathbb{C}$. Vì D phản xứng nên:

$$B(D(X),Z)=-B(X,D(Z))=-B(X,xZ)=-x,$$

$$B(D(Y),Z)=-B(Y,D(Z)),B(D(Z),Y)=-B(Z,D(Y)).$$

Do đó $x'=0,t'=0,D(X)=-xX+yP+zQ+wZ+uY,x,y,z,w,u\in\mathbb{C}$. Do $[\mathcal{G},\mathcal{G}]$ cũng là một không gian con ổn định đối với D nên $D(P)=aP+bQ+cZ$ và $D(Q)=a'P+b'Q+c'Z$ với $a,b,c,a',b',c'\in\mathbb{C}$.
Ta có $D(P)=D([X,P])=[D(X),P]+[X,D(P)]$. Suy ra $x=b=0$ và $c=-z$. Tương tự đối với $D(Q)$, ta nhận được $c'=-y,a'=0$.
Dựa vào tính chất phản xứng của D, ta có $B(D(X),X)=0$, hay $w=0$. Tương tự $B(D(P),Q)=-B(P,D(Q)),B(D(X),Y)=-B(X,D(Y))$, suy ra $a=-b',u=-t$.
Cuối cùng ta thu được:

$$D(X)=yP+zQ-tY,D(P)=aP-zZ,D(Q)=-aQ-yZ,D(Z)=0,D(Y)=tZ.$$

Do đó ta có ma trận của D đối với cơ sở $\{X,P,Q,Z,Y\}$ là

$$D=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\ y&a&0&0&0\\ z&0&-a&0&0\\ 0&-z&-y&0&t\\ -t&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

□

Mệnh đề 2.12. *Cho $\mathcal{G}$ là đại số Lie toàn phương 5-chiều. Gọi D là đạo hàm phản xứng của $\mathcal{G}$. Khi đó ma trận biểu diễn của D đối với cơ sở $\{Z_1,Z_2,T,X_1,X_2\}$ được xác định như sau:*

$$D=\begin{bmatrix}x&y&-b&0&-t\\ z&-x&-c&t&0\\ 0&0&0&b&c\\ 0&0&0&-x&-z\\ 0&0&0&-y&x\end{bmatrix}.$$

Chứng minh. Giả sử đại số Lie toàn phương $\mathcal{G}=Span\{Z_1,Z_2,T,X_1,X_2\}$, tích Lie cho bởi $[X_1,X_2]=T,[X_1,T]=-Z_2,[X_2,T]=Z_1$, các trường hợp còn lại là tầm thường. Dạng song tuyến tính B cho bởi $B(X_i,Z_i)=B(T,T)=1,i=1,2$, các trường hợp còn lại bằng 0.
Do $Z(\mathcal{G})=\mathbb{C}.Z_1+\mathbb{C}.Z_2$ là không gian con ổn định đối với D, tức là $D(Z(\mathcal{G}))\subset Z(\mathcal{G})$. Nên $D(Z_1)=xZ_1+zZ_2,D(Z_2)=yZ_1+wZ_2,x,z,y,w\in\mathbb{C}$. Vì D phản xứng nên:

$$B(D(X_1),Z_1)=-B(X_1,D(Z_1))=-B(X_1,xZ_1+zZ_2)=-x,$$

$$B(D(X_1), Z_2) = -B(X_1, D(Z_2)) = -B(X_1, yZ_1 + wZ_2) = -y.$$

Do đó $D(X_1) = -xX_1 - yX_2 + y_1Z_1 + tZ_2 + bT, x, y, y_1, t, b \in \mathbb{C}$. Tương tự, ta có:

$$B(D(X_2), Z_1) = -B(X_2, D(Z_1)) = -B(X_2, xZ_1 + zZ_2) = -z,$$

$$B(D(X_2), Z_2) = -B(X_2, D(Z_2)) = B(X_2, yZ_1 + wZ_2) = -w.$$

Nên ta có thể đặt $D(X_2) = -zX_1 - wX_2 + y_2Z_1 + t_1Z_2 + cT, z, w, y_2, t_1, c \in \mathbb{C}$. Áp dụng tính chất phản xứng của D ta có $B(X_1, D(X_1)) = -B(D(X_1), X_1), B(X_2, D(X_2)) = -B(D(X_2), X_2)$ nên $B(X_1, D(X_1)) = B(X_2, D(X_2)) = 0$. Suy ra $B(X_1, -xX_1 - yX_2 + y_1Z_1 + tZ_2 + bT) = 0, B(X_2, -zX_1 - wX_2 + y_2Z_1 + t_1Z_2 + cT) = 0$, tức là $y_1 = t_1 = 0$.
Do $B(X_1, D(X_2)) = -B(X_1, D(X_2))$ nên ta thu được:

$$B(X_1, -zX_1 - wX_2 + y_2Z_1 + cT) = -B(-xX_1 - yX_2 + tZ_2 + bT, X_2).$$

Điều này chứng tỏ $y_2 = -t$. Mặt khác, ta có:

$$D(T) = D([X_1, X_2]) = [D(X_1), X_2] + [X_1, D(X_2)] = (x + w)T - bZ_1 - cZ_2$$

$$D(Z_1) = D([X_2, T]) = [D(X_2), T] + [X_2, D(T)] = yZ_2 - (x + 2w)Z_1.$$

Suy ra $xZ_1 + zZ_2 = yZ_2 - (x + 2w)Z_1$. Do đó $x = -(x + 2w)$ hay $w = -x$.
Cuối cùng ta thu được $D(Z_1) = xZ_1 + zZ_2, D(Z_2) = yZ_1 - xZ_2, D(X_1) = -xX_1 - yX_2 + tZ_2 + bT, D(X_2) = -zX_1 + xX_2 - tZ_1 + cT$ và $D(T) = -bZ_1 - cZ_2$.
Do đó ma trận của D đối với cơ sở $\{Z_1, Z_2, T, X_1, X_2\}$ là

$$D = \begin{bmatrix} x & y & -b & 0 & -t \\ z & -x & -c & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & -x & -z \\ 0 & 0 & 0 & -y & x \end{bmatrix}.$$

□

2.2.2 Mở rộng kép của đại số Lie toàn phương

Định nghĩa 2.13. ([5]) *Cho $(\mathcal{G}, B)$ là một đại số Lie toàn phương và D là một đạo hàm phản xứng của $\mathcal{G}$. Trên không gian véctơ*

$$\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \oplus \mathbb{C}.e \oplus \mathbb{C}.f$$

ta định nghĩa phép toán $[X, Y]_{\overline{\mathcal{G}}} = [X, Y]_{\mathcal{G}} + B(D(X), Y)f, [e, X] = D(X)$ và $[f, \overline{\mathcal{G}}], \forall X, Y \in \mathcal{G}$. Khi đó $\overline{\mathcal{G}}$ trở thành một đại số Lie, hơn nữa $\overline{\mathcal{G}}$ còn là một đại số Lie toàn phương với dạng song tuyến tính đối xứng, không suy biến và bất biến $\overline{B}$ được xác định $\overline{B}(e, e) = \overline{B}(f, f) = \overline{B}(e, \mathcal{G}) = \overline{B}(f, \mathcal{G}) = 0, \overline{B}(X, Y) = B(X, Y)$ và $\overline{B}(e, f) = 1$ với mọi $X, Y \in \mathcal{G}$. Trong trường hợp này, ta gọi $\overline{\mathcal{G}}$ là mở rộng kép hay mở rộng kép 1-chiều của $\mathcal{G}$ bởi D.

Mở rộng kép là một công cụ hữu ích để thu được các đại số Lie toàn phương từ một đại số Lie toàn phương đã cho và chúng xuất hiện thường xuyên trong bài toán phân loại. Trong định nghĩa trên, nếu $\mathcal{G}$ là aben và $D \neq 0$ thì $\dim([[\mathcal{G}, \mathcal{G}], [\mathcal{G}, \mathcal{G}]]) = 1$. Trong trường hợp này $\overline{\mathcal{G}}$ được gọi là mở rộng kép 1-bước hoặc đại số Lie toàn phương kì dị.

Ví dụ 2.14. *Cho $\mathcal{G}$ là đại số Lie giao hoán phức hai chiều và B là dạng song tuyến tính đối xứng không suy biến bất biến trên $\mathcal{G}$. Ta có thể chọn $\mathcal{G} = Span\{P, Q\}$ sao cho $B(P,P) = B(Q,Q) = 0, B(P,Q) = 1$, khi đó ma trận của đạo hàm phản xứng D của $\mathcal{G}$ được cho như sau:*

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Đặt không gian véc tơ

$$\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \oplus \mathbb{C}.X \oplus \mathbb{C}.Z$$

và định nghĩa trên $\overline{\mathcal{G}}$ một phép toán

$$[X,P] = D(P) = P, [X,Q] = D(Q) = -Q, [P,Q]_{\overline{\mathcal{G}}} = [P,Q]_{\mathcal{G}} + B(D(P),Q)Z = Z$$

các trường hợp còn lại tầm thường. Dạng song tuyến tính trên $\overline{\mathcal{G}}$ được xác định $\overline{B}(P,Q) = \overline{B}(X,Z) = 1$.

Khi đó $\overline{\mathcal{G}}$ là đại số Lie kim cương.

Ví dụ 2.15. *Cho $\mathcal{G}$ là đại số Lie giao hoán phức ba chiều và B là dạng song tuyến tính đối xứng không suy biến bất biến trên $\mathcal{G}$. Ta có thể chọn $\mathcal{G} = Span\{X, Y, Z\}$ sao cho $B(X,Z) = B(Y,Y) = 1$, các trường hợp còn lại bằng 0. Ta tiến hành mở rộng kép bằng đạo hàm phản xứng:*

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Đặt không gian véc tơ

$$\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \oplus \mathbb{C}.e \oplus \mathbb{C}.f,$$

và định nghĩa trên $\overline{\mathcal{G}}$ một phép toán

$$[e,Y] = D(Y) = X, [e,Z] = D(Z) = -Y, [Y,Z]_{\overline{\mathcal{G}}} = [Y,Z]_{\mathcal{G}} + B(D(Y),Z)f = f,$$

các trường hợp còn lại tầm thường. Dạng song tuyến tính trên $\overline{\mathcal{G}}$ được xác định $\overline{B}(X,Z) = \overline{B}(Y,Y) = \overline{B}(e,f) = 1$, các trường hợp còn lại bằng 0. Khi đó $\overline{\mathcal{G}}$ trở thành đại số Lie toàn phương 5-chiều.

Trong [5] đã đưa ra một kết quả hay về sự đẳng cấu của các đại số Lie toàn phương là mở rộng kép của một đại số Lie toàn phương $\mathcal{G}$ như sau:

Mệnh đề 2.16. *Cho $\mathcal{G}$ là đại số Lie toàn phương và D, D' là các đạo hàm phản xứng của $\mathcal{G}$. Nếu $D - D' = ad(X), X \in \mathcal{G}$ thì mở rộng kép của $\mathcal{G}$ bởi D và D' là đẳng cấu.*

Chú ý 2.17. *Từ kết quả của mệnh đề 2.11, 2.12 ta có suy ra các kết quả sau:*

1. *Trong mệnh đề 2.11, dể thấy*

$$D' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ -t & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cũng là đạo hàm phản xứng của $\mathcal{H}$. Khi đó

$$D - D' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y & a & 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & -z & -y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = ad(aX - yY + zQ),$$

với $aX - yY + zQ \in \mathcal{H}$. Theo mệnh đề 2.16 thì mở rộng kép 1-chiều của $\mathcal{H}$ bởi D và D' là đẳng cấu.

2. *Trong mệnh đề 2.12, dể thấy*

$$D' = \begin{bmatrix} x & y & 0 & 0 & 0 \\ z & -x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & -z \\ 0 & 0 & 0 & -y & x \end{bmatrix}$$

cũng là đạo hàm phản xứng của $\mathcal{G}$. Khi đó

$$D - D' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -b & 0 & -t \\ 0 & 0 & -c & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = ad(cX_1 - bX_2 + tT),$$

với $cX_1 - bX_2 + tT \in \mathcal{G}$. Theo mệnh đề 2.16 thì mở rộng kép 1-chiều của $\mathcal{G}$ bởi D và D' là đẳng cấu.

3 Kết luận

Nghiên cứ các đại số Lie toàn phương là một hướng nghiên cứu mới và khá lý thú. Một vài khái niệm và kết quả được nêu trong bài báo cáo đã được bắt gặp trong những công trình của nhiều tác giả khác. Mở rộng kép bằng đạo hàm phản xứng của một đại số Lie toàn phương là một công cụ hữu dụng để giải quyết bài toán phân loại các đại số Lie toàn phương và siêu đại số Lie toàn phương.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. S. Benayadi and A. Elduque, *Classification of quadratic Lie algebras of low dimension*, arXiv:1404.5174v1[math.RA]. ↑ 1, 6,18

2. H. Baum and I. Kath, *Doubly extended Lie Groups-curvature, holonomy and parallel spinors*, Differential Geom. Appl. **19**(2003), no. 3, 253-280. ↑ 1, 5

3. M. T. Duong, G. Pinczon and R. Ushirobira, *A new invariant of quadratic Lie algebras* , Algebras and Representation Theory **15** (2012), 1163-1203. ↑ 3, 8,16

4. G. Favre and L. J. Santharoubane,*symmetric, invariant, non-degenerate bilinear form on a Lie algebra*, J. Algebra **105** (1987), 451-464, ↑ 1, 3

5. M. T. Duong and R. Ushirobira, *Solvable quadratic Lie algebras of dimensions* ≤ 8, arXiv: 1407.6775v1 [math.RA] (2014).

6. I. Kath, *Nilpotent metric Lie algebras of small dimension*, J. Lie theory **17** (2007), no. 1, 87 - 131. ↑ 9, 18.