

# MỘT SỐ BIỆN PHÁP BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC GIẢI TOÁN CHO HỌC SINH THÔNG QUA DẠY HỌC GIẢI BÀI TẬP CHỦ ĐỀ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN TOÁN LỚP 12 NÂNG CAO

**Nguyễn Thị Bạch Tuyết**

ĐHSTOAN11, Khoa Sư phạm Toán-Tin, Trường Đại học Đồng Tháp

Email: tuyettoan11@gmail.com

**Tóm tắt.** *Bồi dưỡng năng lực giải toán cho học sinh là một vấn đề đang được nhiều người quan tâm trong giai đoạn hiện nay. Chủ đề phương pháp tọa độ trong không gian có nhiều nội dung trọng tâm trong chương trình hình học lớp 12. Do vậy nếu đề xuất được các biện pháp bồi dưỡng năng lực giải toán cho học sinh trong chủ đề này thì sẽ góp phần nâng cao năng lực giải toán cho học sinh. Bài viết đề xuất một số biện pháp nhằm bồi dưỡng năng lực giải toán cho học sinh thông qua dạy học giải bài tập chủ đề tọa độ trong không gian.*

## 1. Đặt vấn đề

Bồi dưỡng năng lực giải toán có vai trò quan trọng trong việc phát triển năng lực trí tuệ của học sinh, vì để giải bài toán học sinh phải suy luận phải tư duy, phải liên hệ với các bài toán khác để tìm ra lời giải; phải biết huy động kiến thức, biết chuyên đổi ngôn ngữ, biến đổi đối tượng. Chủ đề phương pháp tọa độ trong không gian hình học lớp 12 nâng cao là một chủ đề đa dạng và phong phú, có nhiều ứng dụng. Nếu bồi dưỡng cho học sinh năng lực giải bài tập toán thông qua dạy học chủ đề này thì sẽ giúp học sinh hình thành và phát triển được nhiều năng lực khác của một người lao động mới. Vấn đề đặt ra là làm thế nào để bồi dưỡng có hiệu quả năng lực giải toán cho học sinh để cho các em sau này khi đứng trước một bài toán có thể tự giải được một cách hợp lí. Bài viết này đã đề xuất một số biện pháp để bồi dưỡng năng lực giải toán cho học sinh thông qua dạy học giải bài tập chủ đề tọa độ trong không gian toán 12 nâng cao.

## 2. Một số vấn đề chung về năng lực giải toán

### 2.1. Khái niệm năng lực và năng lực giải toán

Khái niệm năng lực có nhiều cách diễn giải khác nhau:

Theo X.L Rubinxtein cho rằng: “*Năng lực là toàn bộ các thuộc tính tâm lí làm cho con người thích hợp với một hoạt động có lợi ích xã hội nhất định*”. Theo nhà tâm lí học người Nga nổi tiếng V.A. Cruchetxki thì: “*Năng lực được hiểu như là: Một phức hợp các đặc điểm tâm lí cá nhân của con người đáp ứng những yêu cầu của một hoạt động nào đó và là điều kiện để thực hiện thành công hoạt động đó*”. [5, 15].

Có nhiều công trình nghiên cứu về “năng lực toán học” từ những phương diện khác nhau, riêng chúng tôi đã quan niệm năng lực toán học như sau: Năng lực toán

học là tổ hợp các kỹ năng của bản thân (có sẵn hoặc qua rèn luyện mà có) đảm bảo thực hiện các hoạt động toán học.

Năng lực giải toán là gì? Chúng tôi quan niệm như sau: Năng lực giải toán là một phần của năng lực toán học, là tổ hợp các kỹ năng đảm bảo thực hiện các hoạt động giải toán một cách có hiệu quả cao sau một số bước thực hiện.

## 2.2. Các thành tố năng lực giải toán của chủ đề phương pháp tọa độ trong không gian toán 12 nâng cao

2.2.1. *Năng lực huy động, vận dụng các tính chất, công thức, định lý vào việc giải nhanh và chính xác các bài tập tính toán.*

2.2.2. *Năng lực trình bày lời giải một cách chặt chẽ và có cơ sở lý luận.*

2.2.3. *Năng lực phân tích tổng hợp dữ kiện và yêu cầu bài toán để định hướng cách giải.*

2.2.4. *Năng lực giải bài toán tọa độ trong không gian bằng nhiều cách khác nhau.*

## 2.3. Một số biện pháp bồi dưỡng năng lực giải toán cho học sinh thông qua dạy học giải bài tập chủ đề tọa độ trong không gian

### 2.3.1. Biện pháp 1: Hệ thống hóa kiến thức cơ bản về tọa độ trong không gian cho học sinh

Các kiến thức cơ bản trong chủ đề yêu cầu học sinh cần nắm như sau:

- Tọa độ của một điểm, một vectơ, biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ, của tích vô hướng và các ứng dụng.
- Phương trình mặt cầu ở dạng chính tắc và tổng quát.
- Đối với mặt phẳng cần nắm được:
  - + Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng.
  - + Phương trình tổng quát của mặt phẳng.
  - + Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc.
  - + Công thức tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng.
- Đối với đường thẳng cần nắm được:
  - + Vectơ chỉ phương của đường thẳng.
  - + Các dạng phương trình của đường thẳng: tham số, chính tắc, tổng quát.
  - + Điều kiện để hai đường thẳng song song, trùng nhau, cắt nhau hoặc chéo nhau và điều kiện để đường thẳng song song, cắt hoặc vuông góc với mặt phẳng.
  - + Các công thức tính khoảng cách.

**Ví dụ 1:** Viết phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng  $(d)$  đi qua  $A(1, 2, 3)$  và có vectơ chỉ phương là  $\vec{a} = (1, 2, -3)$ .

Đây là bài tập cơ bản về viết phương trình đường thẳng khi biết một điểm đi qua và một vectơ chỉ phương của đường thẳng, học sinh chỉ cần biết được dạng phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng, sau đó thế tọa độ điểm đi qua và vectơ chỉ phương vào là được kết quả.

Chẳng hạn,

$$+ \text{phương trình tham số của } (d) \text{ là: } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 - 3t \end{cases}$$

+ phương trình chính tắc của  $(d)$  là:  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{3-z}{3}$ .

**2.3.2. Biện pháp 2: Bồi dưỡng phương pháp giải toán cho học sinh thông qua việc hệ thống các dạng bài tập của chủ đề theo một quy trình**

Có thể khái niệm quy trình là cách thức cụ thể để tiến hành một hoạt động. Như vậy, trong giải toán chúng tôi quan niệm quy trình chính là trình tự thực hiện các bước để giải một bài toán nào đó. Nếu học sinh nắm được quy trình giải toán thì giúp họ giải toán dễ dàng hơn. Các dạng bài tập ở chủ đề tọa độ trong không gian phần lớn được giải theo một quy trình nhất định, chẳng hạn:

❖ Dạng toán viết phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  khi đã biết vectơ pháp tuyến  $\vec{n} = (A, B, C)$  và một điểm  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  có quy trình như sau:

+ Bước 1: Phương trình  $(\alpha)$  có dạng:  $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$

+ Bước 2: Khai triển, rút gọn rồi đưa về dạng tổng quát

$Ax + By + Cz + D = 0$  với  $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ .

❖ Dạng toán viết phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  qua ba điểm  $M, N, P$  không thẳng hàng có quy trình như sau:

+ Bước 1: Tìm vectơ pháp tuyến của  $(\alpha)$ :  $\vec{n}_\alpha = [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}]$

+ Bước 2: Mặt phẳng  $(\alpha)$  qua điểm  $M$  và có vectơ pháp tuyến  $\vec{n}_\alpha$  (tương tự dạng trên).

❖ Dạng toán viết phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng  $(d)$  có quy trình như sau:

+ Bước 1: Xác định một điểm cố định  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  thuộc  $(d)$ .

+ Bước 2: Xác định một vectơ chỉ phương  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  của  $(d)$ .

+ Bước 3: Phương trình tham số và chính tắc của  $(d)$  lần lượt là:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}, (d): \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3} \text{ (nếu } a_1, a_2, a_3 \text{ đều khác 0)}.$$

**Ví dụ 2:** Viết phương trình chính tắc của đường thẳng  $(d)$  nằm trong mặt phẳng

$$(\alpha): y + 2z = 0 \text{ và cắt hai đường thẳng } (d_1): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases} \text{ và } (d_2): \begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 4 + 2t' \\ z = 4 \end{cases}$$

(Trích sách bài tập hình học 12).

Ta thực hiện giải theo quy trình như sau:

Trước tiên ta gọi  $A, B$  lần lượt là giao điểm của  $(d_1)$  và  $(d_2)$  với  $(\alpha)$ . Khi đó đường thẳng  $(d)$  chính là đường thẳng  $AB$ . Sau đó ta tiến hành các bước:

+ *Bước 1:* Xác định một điểm thuộc  $(d)$ .

Ta có  $A(1-t, t, 4t) \in (d_1)$  và  $A \in (\alpha) \Leftrightarrow t + 2 \cdot (4t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$

Suy ra  $A(1, 0, 0)$

Tương tự suy ra  $B(8, -8, 4)$ .

Vậy  $(d)$  qua điểm  $A$  hoặc  $B$ .

+ *Bước 2*: Xác định vectơ chỉ phương của  $(d)$ .

$(d)$  qua  $A, B$  nên có vectơ chỉ phương  $\vec{a}_d = \vec{AB} = (7, -8, 4)$ .

+ *Bước 3*: Phương trình chính tắc của đường thẳng  $(d)$  qua  $A$  và có vectơ chỉ phương  $\vec{a}_d$  là:  $\frac{x-1}{7} = \frac{y}{-8} = \frac{z}{4}$ .

### 2.3.3. Biện pháp 3: Bồi dưỡng năng lực tính toán cho học sinh thông qua việc giải toán tọa độ liên quan đến tính toán

Năng lực tính toán trong quá trình giải bài tập là rất quan trọng, để giải một bài toán được nhanh và chính xác đòi hỏi học sinh phải có năng lực tính toán thành thạo. Trong quá trình giảng dạy, giáo viên cần đưa ra nhiều dạng bài tập về tính toán từ dễ đến khó cho học sinh tự giải, khi đó học sinh làm nhiều bài tập, tính toán nhiều giúp rèn luyện năng lực tính toán cho học sinh. Các dạng bài tập tính toán của chủ đề này như: tính tích có hướng của hai vectơ, tính diện tích, thể tích của các hình trong không gian, tính khoảng cách, tính góc giữa hai vectơ...

**Ví dụ 3:** Cho  $A(1,1,0)$ ,  $B(0,2,1)$ ,  $C(1,0,2)$  và  $M(1,1,1)$ . Chứng minh rằng  $MABC$  là một tứ diện. Tìm thể tích tứ diện  $MABC$ .

Đối với bài toán này đòi hỏi nhiều sự tính toán như tính tọa độ vectơ, tính tích vô hướng, tích có hướng và tính thể tích tứ diện. Vì thế, khi giải nhiều loại bài tập như thế này, giúp cho học sinh rèn luyện được kỹ năng tính toán thành thạo, nhanh chóng và chính xác.

**Ví dụ 4:** Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng

$$\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1-t \\ z=1 \end{cases} \text{ và } \Delta': \frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}. \text{ (Trích sách bài tập hình học 12).}$$

Bài toán này tập hợp nhiều sự tính toán đòi hỏi học sinh phải thành thạo việc tính toán để giải chính xác.

Hai đường thẳng này chéo nhau. Vì công thức tính khoảng cách giữa hai đường

thẳng chéo nhau là  $d(\Delta, \Delta') = \frac{|\overrightarrow{[u_1, u_2]} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}|}{|\overrightarrow{[u_1, u_2]}}$  (với  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  là vectơ chỉ phương của  $\Delta$ ,

$\Delta'$  và  $M_1, M_2$  là hai điểm thuộc  $\Delta, \Delta'$ ) nên học sinh cần tính chính xác các tích vô hướng, có hướng của hai vectơ, độ dài vectơ thì mới thu được kết quả nhanh chóng.

### 2.3.4. Biện pháp 4: Rèn luyện cho học sinh năng lực huy động, vận dụng kiến thức liên quan để giải toán bằng cách đưa ra bài tập từ đơn giản đến phức tạp

Khi đứng trước một bài toán học sinh cần tự đặt cho mình câu hỏi: Để giải bài toán này ta cần những kiến thức nào? Từ đó giúp họ liên tưởng đến các kiến thức liên quan để giải bài toán. Mặt khác, giáo viên cần đưa ra bài toán ngẫu nhiên, không xếp theo một trình tự nào đặt trước để rèn luyện cho học sinh năng lực huy động và vận dụng kiến thức vào giải bài toán.

**Ví dụ 5:** Bài toán tìm phương trình mặt cầu tâm  $I(1, 2, -1)$  và tiếp xúc với đường thẳng

$$(d): \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - t, t \in R \\ z = t \end{cases}$$

- Để giải được bài toán này, ta cần các kiến thức liên quan như sau:

+ Dạng của phương trình mặt cầu có tâm  $I$ , bán kính  $R$ .

+ Mặt cầu  $(S)$  tiếp xúc với  $(d)$  khi và chỉ khi bán kính  $R = d(I, (d))$ .

+ Từ phương trình tham số của  $(d)$  suy ra vectơ chỉ phương của  $(d)$  và một điểm thuộc  $(d)$ .

+ Công thức tính khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng.

Khi học sinh đã liên tưởng được những kiến thức liên quan đến bài toán thì họ sẽ vận dụng kiến thức vào giải bài toán dễ dàng, nhanh chóng.

### 2.3.5. Biện pháp 5: Rèn luyện năng lực trình bày, đồng thời khắc phục sai lầm qua việc dạy học hay sửa chữa bài kiểm tra, đánh giá của học sinh

Các sai lầm học sinh thường mắc phải đối với chủ đề này:

- Nhầm lẫn giữa vectơ chỉ phương và vectơ pháp tuyến.

- Thế lộn vị trí của vectơ chỉ phương và vectơ pháp tuyến vào phương trình tham số của đường thẳng.

- Không phân biệt được tọa độ điểm và vectơ pháp tuyến của phương trình tổng quát mặt phẳng.

- Nhầm lẫn dấu của tọa độ tâm trong phương trình mặt cầu.

- Ghi công thức tính khoảng cách từ một điểm  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  đến mặt phẳng

$$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0 \text{ là } d(M_0, (\alpha)) = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}} \text{ sai lầm ở chỗ:}$$

+ Ở tử quên dấu giá trị tuyệt đối.

+ Ở mẫu dư  $D^2$ .

Từ những sai lầm đó, chúng tôi đưa ra một số biện pháp khắc phục sau:

- Cho học sinh làm nhiều bài tập về vấn đề mà học sinh thường sai lầm để họ hiểu rõ và khắc sâu sau này không sai sót nữa.

- Cho bài toán có lời giải sai và yêu cầu học sinh tìm chỗ sai sau đó sửa lại cho đúng.

- Qua việc chấm bài kiểm tra, bài thi của học sinh, giáo viên cần khoanh vùng chỗ sai và sửa chữa trực tiếp trên lớp cho cả lớp biết mà rút kinh nghiệm.

- Có thể cho bài tập và cho hẳn đáp án để học sinh sau khi giải xong có thể so sánh với đáp án, nếu sai sót thì chỉnh sửa kịp thời.

**Ví dụ 6:** Viết phương trình tham số của đường thẳng  $(d)$  đi qua hai điểm  $A(1, 0, -2)$  và  $B(2, 1, 1)$ .

• Học sinh trình bày lời giải như sau:

$$\text{Ta có: } \overline{AB} = (1, 1, 3)$$

$$\text{Vậy đường thẳng } (d) \text{ có dạng: } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

Học sinh có thói quen bắt đầu giải một bài toán bằng từ “ta có” và ghi các kết quả tự phân tích trong đầu ra, rồi đi đến kết luận, làm cho bài giải không mạch lạc thiếu logic, bên cạnh đó sử dụng câu từ chưa chính xác như “đường thẳng  $(d)$  có dạng”, mà phải là “phương trình đường thẳng  $(d)$  là”.

Đối với bài giải trên học sinh đã sai lầm ở chỗ thế lộn vị trí giữa vector chỉ phương và một điểm đi qua vào phương trình tham số, không nêu rõ vector  $\overline{AB}$  là vector chỉ phương của đường thẳng và đường thẳng đi qua điểm nào.

Do đó, khi gặp các trường hợp này giáo viên cần kịp thời sửa chữa, trình bày lại hoàn chỉnh cho học sinh được rõ, để sau này nếu có gặp lại bài tập tương tự thì các em không còn mắc phải sai sót như vậy.

- Trình bày lại lời giải như sau:

Vector  $\overline{AB} = (1, 1, 3)$  là một vector chỉ phương của đường thẳng  $(d)$  và đường thẳng  $(d)$  đi qua điểm  $A(1, 0, -2)$ .

$$\text{Vậy phương trình tham số của } (d) \text{ là: } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$$

### 3. Kết luận

Trong bài báo cáo này tôi đã đưa ra được một số thành tố năng lực giải toán và từ đó đề xuất được 5 biện pháp bồi dưỡng năng lực giải toán cho học sinh qua dạy học giải bài tập chủ đề tọa độ trong không gian toán 12 nâng cao, đồng thời tôi đưa ra ví dụ minh họa cho từng biện pháp đề xuất. Tôi hy vọng đề tài này góp phần nâng cao năng lực giải toán cho học sinh, đồng thời góp phần vào việc nâng cao chất lượng giảng dạy cho giáo viên, giúp cho giáo viên có thêm công cụ dạy học mới và học sinh sau khi được bồi dưỡng năng lực giải toán sẽ tự tin hơn trong quá trình giải toán của mình.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. B. V. Nghị (2008), *phương pháp dạy học những nội dung cụ thể môn toán*, NXBĐHSP.
2. Đ. Quỳnh (Tổng chủ biên), V.N. Cương (Chủ biên), P. K. Ban, L. H. Hùng, T. Mân, *sách giáo khoa Hình học 12 Nâng cao*, NXB Giáo dục.
3. N. B. Kim (2004), *phương pháp dạy học đại cương môn toán*, NXBĐHSP.
4. Nguyễn Mộng Hy (Chủ biên), Khu Quốc Anh, Trần Đức Huyền, *Bài tập Hình học 12*, NXB Giáo dục.
5. L. X. Trường (2013), *Bồi dưỡng năng lực giải toán cho sinh viên ngành sư phạm toán trình độ cao đẳng qua dạy học môn số học*, Báo cáo và tổng kết đề tài khoa học và công nghệ cấp cơ sở, Trường Đại học Đồng Tháp.
6. Luật Giáo Dục năm 2005 và Luật sửa đổi Giáo Dục năm 2009.