KHAI THÁC MỘT SỐ DẠNG TOÁN SỐ HỌC CÓ QUY LUẬT TRONG GIẢI TOÁN MÁY TÍNH CẦM TAY

ThS. Lê Trung Hiếu
Khoa Sư phạm Toán-Tin, Trường Đại học Đồng Tháp
Email: lthieu@dthu.edu.vn

ThS. Nguyễn Thị Bích Thuận
Khoa Kinh tế và Quản trị kinh doanh, Trường Đại học Đồng Tháp
Email: ntbthuan@dthu.edu.vn

Tóm tắt. *Chúng tôi giới thiệu tổng quan về kĩ thuật giải một số dạng toán số học có quy luật dành cho máy tính cầm tay trong chương trình toán phổ thông. Đối với mỗi dạng toán được đề cập, chúng tôi đặt ra một số bài toán nâng cao giải được bằng kĩ thuật tương tự.*

1. Mở đầu

Máy tính cầm tay là một trong những thiết bị giáo dục hỗ trợ hiệu quả cho việc tính toán trong học tập nghiên cứu của học sinh, sinh viên và việc giảng dạy của giáo viên. Gần đây, nhiều tác giả trong và ngoài nước đã có những nghiên cứu về lợi ích của máy tính cầm tay trong dạy học toán; về các quy trình và giải thuật nhằm sử dụng hiệu quả máy tính cầm tay trong giải toán; về việc ứng dụng máy tính cầm tay vào học tập nghiên cứu, … (xem [2]-[10]). Tuy nhiên, các dạng toán số học có quy luật chưa được khai thác sâu và có hệ thống. Do đó, nhiều bài toán số học trở nên khá phức tạp nếu chúng ta không am hiểu về thuật giải chúng.

Trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu và nêu quy trình giải chi tiết một số dạng toán số học kể trên, đồng thời tổng quát hóa chúng thành các bài toán mới khó hơn. Một ý nghĩa quan trọng là các quy trình giải được trình bày có thể áp dụng rộng rãi cho các dòng máy tính phổ thông do Bộ Giáo dục và Đào tạo cho phép thí sinh được sử dụng trong phòng thi như Casio fx 570MS, Casio fx 570ES (PLUS), VinaCal 570MS, VinaCal 570ES (PLUS), VN-570RS, VN-570ES (PLUS), … (xem [1]).

2. Một số dạng toán số học có quy luật

2.1. Thử kết quả để tìm ra quy luật của phép toán

a) *Bài toán*. Tìm tất cả các chữ số trong kết quả của phép toán sau $A=(\frac{10^{2014}+5}{3})^2$.

Hướng dẫn giải. Đặt $A_k=(\frac{10^k+5}{3})^2$, $k\in\mathbb{N}^*$. Thử lần lượt trên máy với $k=1,2,3,\ldots$ để tìm ra quy luật của A_k. Để thử nhanh, ta nhập biểu thức $(\frac{10^X+5}{3})^2$ vào máy (ấn ALPHA X để nhập biến X) và ấn phím CALC, Máy hỏi X? nhập 1 $\boxed{=}$, kết quả $A_1 = 25$;

Ấn CALC, máy hỏi X? nhập 2 $\boxed{=}$, kết quả $A_2 = 1225$;

Ấn CALC, máy hỏi X? nhập 3 $\boxed{=}$, kết quả $A_3 = 112225$;

Ấn CALC, máy hỏi X? nhập 4 $\boxed{=}$, kết quả $A_4 = 11122225$;

Từ quy luật này ta có $A = A_{2014} = 11...1122...225$ có 2013 chữ số 1, 2014 chữ số 2.

Khai thác bài toán. Ta thấy tổng các chữ số trên tử số của phân số $\dfrac{10^X + 5}{3}$ là 6, do đó tử số chia hết cho 3, suy ra A phải là số nguyên. Bài toán có thể khai thác thành nhiều dạng tương tự ở mức độ khó hơn khi cho

$$A = \frac{100^{2015} + 2}{3},\ A = (\frac{100^{2015} + 8}{3})^2,\ A = (\frac{100^{2015} + 14}{3})^2,\ A = (\frac{100^{2017} + 8}{9})^2, \ldots$$

b) *Bài toán*. Tính tổng tất cả các chữ số của số nguyên dương $B = 99...9^2$ (có 2014 chữ số 9).

Hướng dẫn giải. Lần lượt thử trên máy ta có: $9^2 = 81$, $99^2 = 9801$, $999^2 = 998001$, $9999^2 = 99980001$, … Theo quy luật đó thì B=99…9800…01 có 2013 chữ số 9, 1 chữ số 8, 2013 chữ số 0 và 1 chữ số 1. Suy ra tổng các chữ số của B là $9 \times 2013 + 8 + 1 = 18126$.

Khai thác bài toán. Thử trên máy cho bài toán trên với số mũ mới là 3, 4, … ta thấy kết quả vẫn có quy luật. Do vậy, bài toán có thể khai thác thành một số dạng tương tự khi cho $B=99…9^3$ (có 2015 chữ số 9), $B=99…9^2+ 99…9^3$ (mỗi số hạng có 2015 chữ số 9), $B = 999...9^2 + 999...9^3 + 999...9^4$ (mỗi số hạng có 2015 chữ số 9). Khi tìm được quy luật của B thì việc tính tổng các chữ số của B là dễ dàng.

2.2. Tìm k chữ số cuối bên phải của một lũy thừa m^α (với $m, \alpha \in \mathbb{N}^*$, $m \neq 1$)

Về lý thuyết, để tìm k chữ số cuối bên phải (gọi tắt là chữ số cuối nếu không có sự nhầm lẫn ở đây) của m^α ta cần tìm số dư khi chia m^α cho 10^k ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Nhưng tính toán theo cách này sẽ mất nhiều thời gian vì phải tiến hành qua nhiều bước để tìm đồng dư cho 10^k, do vậy trên thực tế người ta thường áp dụng một số dấu hiệu sau đây để rút ngắn thời gian giải:

- *Dấu hiệu* 1. *Cơ số có đuôi bất biến với mọi lũy thừa*: Nếu m có các chữ số cuối lần lượt là 1, 5, 6, 76, 25, 376, 625, 9376, 0625 thì m^α cũng có các chữ số cuối tương ứng là 1, 5, 6, 76, 25, 376, 625, 9376, 0625 với mọi số mũ $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
- *Dấu hiệu* 2. *Số mũ α chia hết cho* 100: Ta có bảng sau

Chữ số hàng đơn vị của m	Ba chữ số cuối của m^α	Ví dụ
0	000	$2010^{1200} \equiv 000 \pmod{1000}$
5	625	$245^{5200} \equiv 625 \pmod{1000}$
2, 4, 6, 8	376	$2014^{234500} \equiv 376 \pmod{1000}$
1, 3, 7, 9	001	$1237^{800} \equiv 1 \pmod{1000}$

Việc chứng minh Dấu hiệu 1, 2 là đơn giản bởi tính chất về đồng dư số học.

Bài toán. Tìm ba chữ số cuối bên phải của lũy thừa $2014^{20152015}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $2014^{20152015} = 2014^{20152000} \times 2014^{15}$. Áp dụng Dấu hiệu 2 ta có $2014^{20152000} \equiv 376 \ (\text{mod}\ 1000)$.

Ngoài ra $2014^{15} \equiv 14^{15}\ (\text{mod}\ 1000) \equiv 224\ (\text{mod}\ 1000)$.

Vậy $2014^{20152015} \equiv 376 \times 224 \equiv 224\ (\text{mod}\ 1000)$. Do đó ba chữ số cuối cần tìm là 224.

Khai thác bài toán. Bài toán có thể khai thác theo các hướng sau:

- Tìm ba chữ số tận cùng của lũy thừa m^{α} có cơ số và số mũ rất lớn $m = \overline{a_1a_2...a_n},\ \alpha = \overline{b_1b_2...b_k}$ với $n, k \in \mathbb{N}^*$. Áp dụng tính chất đồng dư số học, ta có

$$m^{\alpha} \equiv \overline{a_{n-2}a_{n-1}a_n}^{\,\overline{b_1b_2...b_{k-2}00}} \times \overline{a_{n-2}a_{n-1}a_n}^{\,\overline{b_{k-1}b_k}} \text{ (mod 1000)},$$

trong đó có thể đọc ngay ba chữ số cuối của $\overline{a_{n-2}a_{n-1}a_n}^{\,\overline{b_1b_2...b_{k-2}00}}$ theo Dấu hiệu 2 dựa vào chữ số hàng đơn vị của cơ số $\overline{a_{n-2}a_{n-1}a_n}$ là a_n. Khi đó, bài toán với cơ số và số mũ lớn trở thành bài toán đồng dư đơn giản. Ví dụ, để tìm ba chữ số cuối của $2014201520162018^{456456171615141312}$ ta đưa về tìm ba chữ số cuối của 376×18^{12}. Kết quả là $376 \times 18^{12} \equiv 176 \text{ (mod 1000)}$.

- Tìm ba chữ số cuối của một số có chứa phép toán tổng, hiệu, tích các lũy thừa với các lũy thừa có cơ số và số mũ lớn. Ta tìm ba chữ số cuối của từng lũy thừa rồi cộng (trừ, nhân) chúng lại để tìm đồng dư cho 1000. Lưu ý, đối với phép trừ, nếu được kết quả là số âm thì ta cộng chúng cho $k \times 1000$ để được kết quả là số dương bé hơn 1000 (tức có tối đa ba chữ số).

- Tìm ba chữ số cuối của một số tạo nên từ một phép toán phức tạp nhưng có thể đánh giá được cơ số, số mũ. Ví dụ tìm ba chữ số cuối của $A = [15^{16^{17^{\cdots^{50}}}} + 4]^{10^{11^{\cdots^{99}}}}$. Ta thấy số mũ chia hết cho 100. Ngoài ra $15^{16^{17^{\cdots^{50}}}}$ có chữ số cuối là 5 (theo Dấu hiệu 1), do đó $15^{16^{17^{\cdots^{50}}}} + 4$ có chữ số cuối là 9. Theo Dấu hiệu 2, ba chữ số cuối của A là 001. Việc khai thác áp dụng các dấu hiệu một cách linh hoạt làm cho bài toán phức tạp trở nên đơn giản đến mức có thể nhẩm tính được kết quả.

- Ta còn có thể khai thác mở rộng thêm dạng bài tập hỗn hợp hoàn toàn mới như sau: Tìm ba chữ số cuối của C^D với

$$C = [11^{12^{13^{\cdots^{39}}}} + 4]^{10^{11^{12^{\cdots^{99}}}}} \text{ và } D = \left(\frac{10^{2014} + 5}{3}\right)^2.$$

2.3. Tìm chữ số thập phân thứ k sau dấu phẩy trong phép chia m cho n

Bài toán. Tìm chữ số thập phân thứ 2014 sau dấu phẩy trong phép chia 23 cho 111.

Hướng dẫn giải. Ta có $\frac{23}{111}$=0,(207) tuần hoàn với chu kỳ gồm 3 chữ số là 207. Do chu kỳ 207 luôn lặp lại nên để tìm chữ số thứ 2014 sau dấu phẩy ta chỉ cần tìm dư khi chia 2014 cho số chữ số của chu kỳ là 3. Tính toán ta có 2014 chia 3 dư 1 nên chữ số cần tìm là 2.

Khai thác bài toán. Hướng khai thác thứ nhất là phép chia có chu kỳ không liền sau dấu phẩy và số chữ số của chu kỳ có thể lớn. Ví dụ $\frac{23}{185}$=0,1(243), $\frac{8477}{55550}$=0,15(2601). Khi đó, quy trình giải là tương tự như trên, tuy nhiên ở bước cuối cùng khi đối chiếu số dư của vị trí *k* cho trong đề bài với chữ số tương ứng của chu kỳ thì ta cần đánh số thứ tự bên trên các chữ số thập phân của chu kỳ để tìm ra quy luật. Cách này áp dụng hiệu quả và tránh nhầm lẫn cho trường hợp phép chia có phần không tuần hoàn gồm nhiều chữ số. Chẳng hạn, tìm chữ số thập phân thứ 2014 trong phép chia 8477 cho 55550 ta làm như sau: $\frac{8477}{55550}$=0,15(2601) có chu kỳ là 2601 gồm 4 chữ số, 2014 chia 4 dư 2. Để kết luận chữ số cần tìm, ta đánh số thứ tự (theo môđun 4) như sau

Số dư	1	2	3	0	1	2	3	0	1	…
Chữ số	1	5	***2***	***6***	***0***	***1***	***2***	***6***	***0***	…

Ta thấy số dư 3, 0, 1, 2 tương ứng với kết quả của chu kỳ là 2, 6, 0, 1. Vậy kết quả cần tìm là chữ số 1.

Hướng khai thác thứ hai là kết hợp giữa bài toán tìm chu kỳ của phép chia có chu kỳ khá lớn và bài toán đồng dư số học khó. Chẳng hạn, tìm chữ số thập phân thứ 2014^{2015} trong phép chia $\frac{16}{49}$. Lưu ý rằng 16 chia 49 có chu kỳ gồm 42 chữ số là 326530612244897959183673469387755102040816. Cách giải chi tiết sẽ không được trình bày ở đây.

2.4. Tìm số tự nhiên thỏa điều kiện cho trước

Bài toán. Tìm tất cả các số tự nhiên có hai chữ số $\overline{ag}$ thỏa mãn điều kiện $\overline{ag}^4 = \overline{a\star\star\star\star\star g}$, trong đó $\star\star\star\star\star$ là năm chữ số tùy ý.

Hướng dẫn giải. Theo yêu cầu ta cần thử tất cả các số có 2 chữ số từ 10 đến 99. Để hạn chế các số cần thử, ta có nhận xét: $\overline{ag}^4$ có 7 chữ số nên $10^6 \le \overline{ag}^4 \le 9999999$, do đó $32 \le \overline{ag} \le 56$. Ta có thể dùng giải thuật lập trình sau đây để rút ngắn thời gian tìm kết quả: Lưu 31 vào biến đếm *X* (thao tác 31 SHIFT STO *X*), nhập biểu thức $X = X+1 : X^4$ vào màn hình (thao tác ALPHA *X* ALPHA = ALPHA *X* + 1 ALPHA : ALPHA *X* ^ 4, nhập dấu "=" và ":" từ phím màu đỏ), ấn CALC = = ... và quan sát nếu thấy giá trị của X^4 thỏa điều kiện đề bài thì ghi giá trị của *X*. Khi *X* >56 thì kết thúc giải thuật. Trong quá trình thực hiện giải thuật ta thấy $45^4 = 4100625$ và $46^4 = 4477456$. Do vậy các số tự nhiên cần tìm là 45 và 46.

Khai thác bài toán. Đây là dạng toán dùng lập trình có biến đếm để thử nhanh kết quả (biến đếm được giới hạn dựa vào điều kiện cho trước) đồng thời kết hợp quan sát nhận dạng những kết quả nào thỏa mãn yêu cầu đề bài để ghi nhận lại. Sau đây là một số bài toán có thể giải bằng giải thuật tương tự như trên:

- Tìm tất cả các số tự nhiên có 10 chữ số $\overline{a_1a_2...a_{10}}$ biết $\overline{a_1a_2...a_{10}} = \overline{a_8a_{10}}^5$.

- Tìm tất cả các số chính phương có ba chữ số biết chữ số ở vị trí thứ nhất và chữ số ở vị trí thứ ba là giống nhau.
- Tìm số tự nhiên *n* bé nhất biết n^3 có bốn chữ số tận cùng là 3333 (hướng dẫn: tìm lần lượt chữ số ở hàng đơn vị, chục, trăm, nghìn của *n*).

3. Kết luận

Bài viết đã nêu ra một số hướng khai thác mới cho một số dạng toán số học có quy luật trong giải toán máy tính cầm tay thuộc chương trình phổ thông. Các kết quả này có vai trò quan trọng trong việc rèn tư duy sáng tạo và rèn kĩ năng giải toán nhanh, hiệu quả cho học sinh. Hướng phát triển của vấn đề nghiên cứu là tìm hiểu khai thác các bài toán có quy luật thuộc nội dung hình học, hàm số, đa thức, dãy số, … Kết quả của bài viết còn là một hướng khai thác cho giáo viên, học sinh trong việc ôn tập trong các kỳ thi máy tính cầm tay được tổ chức hàng năm.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bộ Giáo dục & Đào tạo (2014), Danh sách máy tính cầm tay được đem vào phòng thi, Công văn của Bộ Giáo dục và Đào tạo, Số tư liệu 2683/BGDĐT-CNTT, Hà Nội.
2. L. T. Hiếu, N. T. B. Thuận (2014), Vai trò của biến Ans trong giải toán máy tính cầm tay, Tạp chí Thiết bị giáo dục, số 106, 24-26.
3. L. T. Hiếu, V. M. Tâm, N. T. B. Thuận (2014), Kĩ thuật sử dụng hàm điều kiện trong lập trình giải toán máy tính cầm tay, Tạp chí khoa học trường ĐHSP Thành phố Hồ Chí Minh, Số 64(98), 18-23.
4. T. D. Phượng, P. T. H. Lý (2005), Một số dạng toán thi học sinh giỏi giải toán trên máy tính điện tử, NXB Giáo dục.
5. T. D. Phượng (2006), Giải toán trên máy tính điện tử, NXB Giáo dục.
6. H. Pomerantz (1997), The role of calculators in math education, Texas Instruments.
7. K. G. Tay (2006), Numerical Methods with Calculator Casio fx-570MS, Malaysia: Penerbit KUiTTHO.
8. N. V. Trang, N. T. Chấng, N. T. Thạch, N. H. Thảo (2007), Hướng dẫn sử dụng và giải toán trên máy tính Casio fx 570MS, NXB Giáo dục.
9. L. T. B. T. Trung (2011), Vấn đề ứng dụng công nghệ thông tin trong dạy học toán và lợi ích của máy tính cầm tay, Tạp chí khoa học ĐHSP TPHCM, Số 30, 51-58.
10. M. Y. Yasin (2012), Scientific Calculators and the Skill of Efficient Computation, BIBECHANA: A Multidisciplinary Journal of Science, Technology and Mathematics, **8**, 31-36.