VỀ LÝ THUYẾT HỆ THỐNG HÀNG ĐỢI

ThS. Huỳnh Thị Kim Loan
Khoa Sư phạm Toán-Tin, Trường Đại học Đồng Tháp
Email: htkloan@dthu.edu.vn

Tóm tắt. *Bài viết giới thiệu về hệ thống hàng đợi trong các hệ thống phục vụ khách hàng.*

1. Mở đầu

Lý thuyết về hệ thống hàng đợi là lý thuyết được nghiên cứu rộng rãi từ thế kỉ 20 và được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực như bưu chính viễn thông, hàng không, đường sắt, kiểm soát lưu lượng giao thông, đánh giá hiệu năng hệ thống máy tính, y tế và chăm sóc sức khỏe, kinh doanh mua bán… Trong nhiều hệ thống phục vụ, khách hàng phải dùng chung tài nguyên, phải chờ để được phục vụ và đôi khi bị từ chối phục vụ. Lý thuyết hệ thống hàng đợi giúp các định và tìm các phương án tối ưu để hệ thống phục vụ tốt nhất và lợi nhuận cao nhất. Trên cơ sở toán học, hệ thống hàng đợi là hệ thống biến động theo thời gian và các trạng thái của nó phát sinh ngẫu nhiên. Chính vì thế phương pháp giải quyết các bài toán trên mô hình hàng đợi chủ yếu dựa vào phân tích các quá trình ngẫu nhiên độc lập làm hệ thống thay đổi trạng thái liên tục theo thời gian. Bài viết sẽ giới thiệu về lý thuyết thú vị này.

2. Nội dung

2.1 Một số kiến thức chuẩn bị

2.1.1 Biến ngẫu nhiên và một số phân phối xác suất thường gặp

Biến ngẫu nhiên là một khái niệm quan trọng trong xác suất thống kê. Một cách giản lược, biến ngẫu nhiên còn gọi là đại lượng ngẫu nhiên, được hiểu là biến nhận giá trị tùy thuộc vào kết quả của phép thử (phép đo, quan sát, thí nghiệm) mà không thể đoán trước được.

Biến ngẫu nhiên chia làm hai loại: rời rạc và liên tục. Biến rời rạc là biến ngẫu nhiên nhận các giá trị từ một tập hợp hữu hạn hoặc đếm được. Biến liên tục là biến ngẫu nhiên nhận giá trị trên một tập con liên tục của tập số thực.

2.1.2 Một số phân phố xác suất thường gặp

- Phân phối Poisson: Một biến ngẫu nhiên X được gọi là có phân bố Poisson với tham số λ, nếu các giá trị của nó là các số nguyên không âm và với mọi $k \in \mathbb{Z}^+$ ta có: $P(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Biến ngẫu nhiên X có phân phối Poisson với tham số λ dùng để đếm số lần xuất hiện của đối tượng quan sát trong một khoảng thời gian đã được xác định trước. Giá trị trung bình của X là $E(X)=\lambda$.

- Phân phối mũ: Biến ngẫu nhiên X gọi là có phân phối mũ với tham số μ nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục, nhận giá trị không âm với hàm mật độ xác suất là $f(x)=\mu e^{-\mu x}$.

Nếu như biến ngẫu nhiên có phân phối Poisson dùng để đếm số lần xuất hiện của đối tượng trong một khoảng thời gian đã được xác định trước thì biến ngẫu nhiên có phân phối mũ dùng để xét khoảng thời gian xuất hiện giữa hai lần xuất hiện liên tiếp của đối tượng. Giá trị trung bình của biến ngẫu nhiên X có phân phối mũ với tham số μ là $E(X)=\dfrac{1}{\mu}$.

2.2 Hệ thống hàng đợi

2.2.1 Giới thiệu về hệ thống hàng đợi

Hệ thống hàng đợi được xây dựng nhằm phục vụ các nhu cầu phát sinh từ một quần thể nhất định. Chẳng hạn: quầy bán hàng, dịch vụ du lịch, ngân hàng, việc đăng ký học tập của sinh viên ở phòng đào tạo,… Như vậy hệ thống hàng đợi bao gồm bộ phận tiếp nhận khách hàng, các trạm phục vụ khách hàng và bộ phận phát sinh từ ngoài vào là lượng khách hàng đến hệ thống. Hai bộ phận này kết hợp với nhau tạo ra hoạt động của hệ thống hàng đợi: thời gian phục vụ khách hàng, số khách hàng chờ được phục vụ tạo thành hàng đợi, quy tắc phục vụ khách hàng như thế nào là hợp lý,…

Người quản lý phải xác định cho được những chi phí vô ích. Những chi phí này tạo thành tính không hiệu quả của hệ thống. Có hai loại chi phí vô ích:

- Chi phí của khách hàng phải chờ trong hệ thống trước khi được phục vụ. Chi phí này có thể hiểu tương đương là trong cùng một thời gian quản lý T nếu khách hàng chờ càng lâu thì lượng khách hàng được phục vụ trong khoảng thời gian T giảm.
- Chi phí do các trạm phục vụ khách hàng nhưng không có khách hàng.

Hai loại chi phí này ngược nhau: nếu giảm chi phí vô ích từ khách hàng thì phải tăng chi phí vô ích từ việc phải tăng số trạm phục vụ và ngược lại. Hiệu quả hoạt động của hệ thống cần phải cân đối hai loại chi phí này một cách hợp lý.

Để tìm giải pháp tốt nhất cho hoạt động của hệ thống, ta cần xác định các tham số quan trọng trong hệ thống hàng đợi như sau:

Tham số 1: Tham số đặc trưng cho phân phối khách hàng đi tới hệ thống.

Tham số 2: Tham số đại diện cho phân phối thời gian phục vụ khách hàng.

Tham số 3: Tham số s là tham số số trạm phục vụ khách hàng.

Tham số 4: Tham số k giới hạn sức chứa của hệ thống đối với số khách hàng phải đợi.

Tham số 5: Tham số m mô tả lực lượng của quần thể nơi mà khách hàng phát sinh. (có thể vô hạn hoặc hữu hạn).

Các tham số trên được sắp xếp theo mức độ quan trọng của tham số đó trong hệ thống.

2.2.2 Các giá trị trung bình quan trọng của hệ thống hàng đợi, chi phí vô ích

Trong hệ thống hàng đợi dễ dàng nhìn thấy 2 quá trình ngẫu nhiên độc lập: quá trình khách hàng xuất hiện ở đầu vào hệ thống và quá trình phục vụ khách hàng tại đầu ra của hệ thống.

Ngoài ra số khách hàng trong hệ thống biến động từ thời điểm này sang thời điểm khác, tạo thành quá trình ngẫu nhiên đặc trưng cho hệ thống, ký hiệu $\{X_t\}_{t\in T}$.

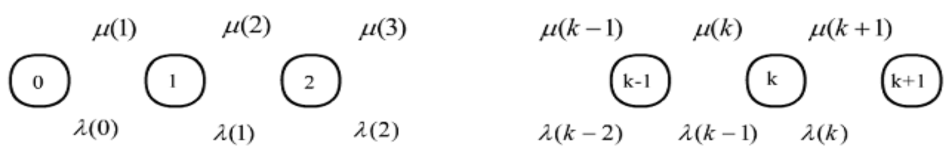
(Bài viết giới hạn chỉ xét tính dừng của quá trình nghĩa là giả sử $X_t \to Z, t \to \infty$, khi đó Z là số khách hàng trong hệ thống ở chế độ dừng)

Mục tiêu của việc xây dựng mô hình là để xác định phân phối dừng Z dựa vào phân phối xác suất ở đầu vào và phân phối xác suất ở đầu ra của hệ thống. Nhìn chung các phân phối này rất đa dạng. Bài viết xem xét hệ thống hàng đợi với:

- Số khách hàng xuất hiện trong một đơn vị thời gian $d=1$ tuân theo phân phối Poisson với tham số λ, $P(\lambda)$.

- Thời gian phục vụ khách hàng ở tất cả các trạm là như nhau và tuân theo phân phối mũ với tham số μ, $E(\mu)$.

Xét không gian trạng thái của hệ thống là $E=\{0,1,2,...,k,...\}$. Khi đó ta cần xác định $P(Z=k)=q_k, k=0,1,2,...$.Đồ thị cân bằng mô tả sự biến động của Z:



Hình 1: Đồ thị cân bằng

Với $k=0$

Luồng ra bằng $q_0\lambda$, luồng vào bằng $q_1\mu$. Cân bằng luồng ta được:

$$q_0\lambda = q_1\mu \Rightarrow q_1 = \frac{\lambda}{\mu}q_0, \text{ đặt } \zeta = \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow q_1 = \zeta q_0$$

Bằng phương pháp quy nạp ta chỉ ra được $q_k = \dfrac{\zeta^k}{k!}q_0, k<s$ (s: số trạm phục vụ)

Với $k=s$

Luồng ra bằng $q_s\lambda + q_s s\mu$, luồng vào bằng $q_{s-1}\lambda + q_{s+1}s\mu$. Cân bằng luồng ta được:

$$q_{s+1} = \frac{\zeta^{s+1}}{s.s!} q_0 .$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được $q_{s+m} = \frac{\zeta^{s+m}}{s^m .s!} q_0, m = 1, 2, ...$

Vì $P(Z = k) = q_k, k = 0,1,2,...$ nên ta có $q_0 + q_1 + ... + q_k + ... = 1$. Ta tìm được

$$q_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\zeta^k}{k!} + \frac{\zeta^s}{1 - \frac{\zeta}{s}}}$$

và từ phân phối của Z ta tìm được số khách hàng trung bình trong hệ thống là:

$$E(Z) = \overline{n} = \zeta + \frac{\zeta^{s+1} q_0}{s.s!(1 - \frac{\zeta}{s})^s}$$

Luật Little: Xét các biến ngẫu nhiên:

T : khoảng thời gian ngẫu nhiên xuất hiện 1 khách hàng.

Z : số lượng khách hàng phát sinh trong T thời gian.

W : số lượng khách hàng phát sinh trong một đơn vị thời gian.

Khi đó dễ thấy $Z = WT$.

Luật Little phát biểu: $E(Z) = E(W)E(T)$.

Ta sẽ sử dụng luật Little để tính một số trung bình cần thiết như sau:

- Số khách hàng trong hệ thống là Z , thời gian ở trong hệ thống của 1 khách hàng là T .

Đặt $E(Z) = \overline{n}$, $E(W) = \lambda$, $E(T) = \overline{t}$. Theo luật Little ta có: $E(T) = \overline{t} = \frac{\overline{n}}{\lambda}$

- Số khách hàng đang được phục vụ là G và thời gian phục vụ cho 1 khách hàng là T_s.

Đặt $E(G) = \overline{g}$, $E(T_s) = \overline{t_s}$. Ta có:

$E(T_s) = \overline{t_s} = \frac{\overline{g}}{\lambda}$, mặt khác ta lại có $E(T_s) = \overline{t_s} = \frac{1}{\mu}$ nên $\overline{g} = \frac{\lambda}{\mu} = \zeta$. (dễ thấy ζ chính là hiệu suất phục vụ trong hệ thống).

- Số khách hàng chờ là Y và thời gian chờ của 1 khách hàng là T_f .

Đặt $E(Y) = \overline{m}$, $E(T_f) = \overline{t_f}$. Khi đó ta có:

$E(T_f) = \overline{t_f} = \frac{\overline{m}}{\lambda}$, mặt khác ta có $\overline{n} = \overline{m} + \overline{g} = \overline{m} + \zeta$ nên $\overline{t_f} = \frac{\overline{n}}{\lambda} - \frac{1}{\mu}$.

- Tính chi phí vô ích trong hệ thống hàng đợi:

Ta sẽ tính các chi phí vô ích trong hệ thống hàng đợi như sau:

+ Thời gian chờ của khách hàng càng lâu thì chi phí vô ích càng lớn với đơn giá là c_1.

+ Trạm phục vụ ngồi không càng lâu thì chi phí vô ích cũng tăng lên, với đơn giá c_2.

Yêu cầu: So sánh lợi nhuận và tổng hai loại chi phí vô ích trên để quyết định tổ chức bao nhiêu trạm phục vụ là tối ưu.

Đặt: T' là khoảng thời gian quản lý hệ thống, s là số trạm phục vụ.

Tổng chi phí vô ích do khách hàng trong hệ thống có s trạm phục vụ: $\overline{t_f}\lambda T'$

Tổng chi phí vô ích do phục vụ phát sinh với s trạm phục vụ: $c_2\overline{\rho}T'$

Tổng hai loại chi phí vô ích là $I(s) = \overline{t_f}\lambda T' + c_2\overline{\rho}T'$.

$I(s)$ là mục tiêu cần xử lý với s tốt nhất.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. N. Đ. H. Anh, *Nghiên cứu về hệ thống hàng đợi và xây dựng chương trình mô phỏng mô hình trên công cụ mô phỏng GPSS,* Luận văn Thạc sĩ, Trường Đại học Công nghệ, 2012.
2. Đ. Đ. Thái, N. T. Dũng, *Nhập môn hiện đại Xác suất và thống kê*, NXB ĐHSP, 2010.
3. N. D. Tiến (và tập thể*), Các mô hình xác suất và ứng dụng, tập 1, 2, 3,* NXB Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2000.
4. U. N. Bhat, *An Introduction to Queueing Theory*, Southern Methodist University, USA, 2008.
5. L. Kleinrock, *Queueing System*, John Wiley & Sons, 1976.