# MỘT SỐ BIỆN PHÁP BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC VẬN DỤNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ VÀO MỘT SỐ DẠNG TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

**Huỳnh Thị Thúy Hằng**
ĐHSTOAN11, Khoa Sư phạm Toán-Tin, Trường Đại học Đồng Tháp
Email: Thanhdanh524@gmail.com

**Tóm tắt.** *Hiện nay, việc bồi dưỡng năng lực nói chung và năng lực giải toán nói riêng cho học sinh rất được quan tâm. Đối với học sinh THPT thì việc giải những bài toán hình học không gian là vấn đề khó khăn. Vì vậy, nếu có những biện pháp bồi dưỡng năng lực, cụ thể là bồi dưỡng năng lực vận dụng phương pháp tọa độ trong việc giải toán hình học không gian thì học sinh sẽ học tập tốt hơn. Bài viết này tôi đưa ra một số biện pháp nhằm bồi dưỡng năng lực vận dụng phương pháp tọa độ vào một số dạng toán hình học không gian THPT.*

## 1. Đặt vấn đề

Việc giải toán hình học không gian là một khó khăn đối với nhiều học sinh lớp 12. Phần lớn các em đã quên những kiến thức, kỹ năng dựng hình, chứng minh trong không gian, mà cụ thể là những kiến thức cơ bản về quan hệ song song và vuông góc trong không gian ở chương trình hình học 11. Ngoài ra, nhiều bài toán hình học không gian đòi hỏi học sinh phải có tư duy tốt, biết quan sát, linh hoạt trong việc kẻ thêm những đường phụ để đi đến lời giải. Đó là một vấn đề khá phức tạp mà không phải học sinh nào cũng làm được. Để khắc phục những khó khăn trên ta cần hướng học sinh giải toán hình học không gian theo một cách khác, đó là dùng phương pháp tọa độ. Nhằm giúp học sinh có phương pháp tối ưu, đơn giản hơn trong việc giải toán hình học không gian vốn phức tạp tôi đã chọn đề tài: “Bồi dưỡng năng lực vận dụng phương pháp tọa độ vào một số dạng toán hình học không gian THPT”.

## 2. Nội dung

### 2.1. Khái niệm năng lực, năng lực vận dụng

Khái niệm “năng lực” là một vấn đề rộng, với nhiều cách định nghĩa khác nhau: Garard và Roegies đã định nghĩa: *“Năng lực là một tích hợp những kỹ năng cho phép nhận biết một tình huống và đáp ứng với tình huống đó tương đối thích hợp và một cách tự nhiên”*. Theo John Erpenbeck thì: *“Năng lực được tri thức làm cơ sở, được sử dụng như khả năng, được quy định bởi giá trị, được tăng cường qua kinh nghiệm và được thực hiện hóa qua chủ định”* (John Erpenbeck, 1998).

Vận dụng (application) được định nghĩa là khả năng sử dụng các tài liệu đã học vào một hoàn cảnh cụ thể mới. Vận dụng là bắt đầu của mức tư duy sáng tạo.

Theo từ điển tiếng Việt thì: *“Vận dụng là mang tri thức, lí luận dùng vào thực tiễn, vận dụng kiến thức đã học vào thực tế”*.

Năng lực vận dụng là gì? Chúng ta có thể hiểu như sau: Năng lực vận dụng là khả năng vận dụng, mang những tri thức, kỹ năng, kiến thức đã học để giải quyết một vấn đề cụ thể nào đó trong cuộc sống. Trong Toán học, thì năng lực vận dụng chính là khả năng vận dụng kiến thức đã học để giải một bài toán hoặc giải thích một vấn đề toán học cụ thể như: chứng minh mệnh đề, định lí, hệ quả,…

**2.2. Các thành tố của năng lực vận dụng phương pháp tọa độ vào giải toán hình học không gian**

Một số thành tố cơ bản:

2.2.1. *Năng lực huy động kiến thức, vận dụng các tính chất, các công thức vào việc giải nhanh và chính xác bài tập dạng tính toán (tính góc, tính khoảng cách).*

2.2.2. *Năng lực trình bày lời giải một cách chặt chẽ, lôgic và có cơ sở lý luận.*

2.2.3. *Năng lực phân tích, tổng hợp giả thiết và kết luận của bài toán để định hướng lời giải.*

2.2.4. *Năng lực chuyển đổi ngôn ngữ trong quá trình giải toán (từ ngôn ngữ hình học sang ngôn ngữ tọa độ, đại số).*

**2.3. Đề xuất một số biện pháp bồi dưỡng năng lực vận dụng phương pháp tọa độ vào một số dạng toán hình học không gian**

**2.3.1. Biện pháp 1:** *Thường xuyên củng cố kiến thức về phương pháp tọa độ trong không gian cho học sinh và các kiến thức có liên quan khác*

Để giải được bài toán hình học không gian bằng phương pháp tọa độ đòi hỏi học sinh phải nắm vững những kiến thức cơ bản về tọa độ trong không gian. Kiến thức là điều kiện cần để giải một bài toán; do đó, khâu củng cố kiến thức khá quan trọng. Đối với một bài toán cụ thể, sau khi đọc đề bài xong ta nên phân tích đề và nhắc lại những kiến thức có liên quan. Thường xuyên nhắc đi nhắc lại những nội dung kiến thức cũng là một cách thiết thực để học sinh ghi nhớ.

Tóm tắt kiến thức cơ bản cần nhớ về phương pháp tọa độ trong không gian.

**Ví dụ 1** [4,185]: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bên $AA', BB', CC', DD'$ và cạnh $AB = a$. Cho các điểm $M, N$ trên cạnh $CC'$ sao cho $CM = MN = NC'$. Xét mặt cầu $(S)$ đi qua bốn điểm $A, B', M, N$.

a) Chứng minh $A', B$ thuộc mặt cầu $(S)$.

b) Xác định tâm và bán kính của $(S)$ theo $a$.

Để giải được ví dụ trên, đòi hỏi học sinh phải nhớ lại kiến thức về phương trình mặt cầu dạng khai triển, tâm và bán kính xác định như thế nào. Đây là đòi hỏi thiết yếu, tiếp đến ta có thể kết hợp vừa hướng dẫn vừa gợi mở cho học sinh:

Cách chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như thế nào?

Điểm $A', B$ thuộc mặt cầu $(S)$ khi nào? Khi tọa độ của nó thỏa mãn phương trình mặt cầu $(S)$.

Để xác định tâm, bán kính của $(S)$ thì ta cần viết được phương trình mặt cầu $(S)$.

Tóm lại, kiến thức chuẩn bị cho việc giải ví dụ trên là:

Tọa độ của điểm;

Phương trình mặt cầu $(S)$ dạng khai triển:

$(S): x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2by-2cz+d=0, (\alpha^2+b^2+c^2>d)$ trong đó, tâm $I(\alpha,b,c)$ và bán kính $R=\sqrt{\alpha^2+b^2+c^2-d}$.

Ngoài ra, từ giả thiết mặt cầu $(S)$ đi qua bốn điểm $A, B', M, N$ dẫn đến hệ phương trình cũng đòi hỏi học sinh nhớ lại cách giải hệ phương trình để tìm $\alpha, b, c, d$ theo $a$ (giải bằng phương pháp thế kết hợp cộng đại số).

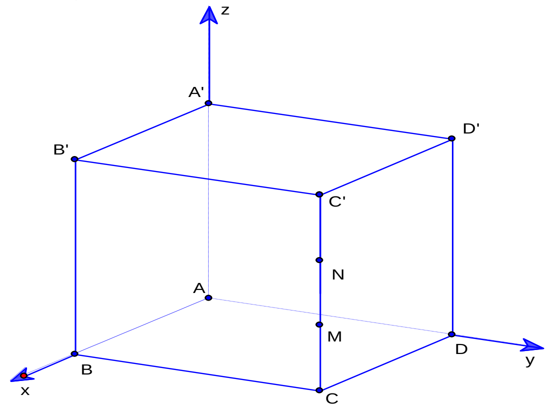
**Giải**

a) Chứng minh $A', B$ thuộc $(S)$ .

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như sau:

- Gốc $O \equiv A$ ;
- Trục $Ox$ đi qua $AB$;
- Trục $Oy$ đi qua $AD$ ;
- Trục $Oz$ đi qua $AA'$.

Khi đó:




$A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;a;0), A'(0;0;a)$.

Ta có: $CM=\dfrac{a}{3} \Rightarrow M\left(a;a;\dfrac{a}{3}\right)$; $CN=\dfrac{2a}{3} \Rightarrow N\left(a;a;\dfrac{2a}{3}\right)$.

Phương trình mặt cầu $(S)$ có dạng:

$$x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2by-2cz+d=0, (\alpha^2+b^2+c^2>d).$$

$(S)$ qua $A, B', M, N$ dẫn đến hệ
$$\begin{cases} d=0 \\ 2a^2-2\alpha a-2ca=0 \\ \dfrac{19}{9}a^2-2\alpha a-2ba-\dfrac{2}{3}ca=0 \\ \dfrac{22}{9}a^2-2\alpha a-2ba-\dfrac{4}{3}ca=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{a}{2} \\ b=\dfrac{7a}{18} \\ c=\dfrac{a}{2} \\ d=0 \end{cases}.$$

Suy ra $(S)$: $x^2+y^2+z^2-ax-\dfrac{7a}{9}y-az=0$.

Thay tọa độ $A'(0;0;a), B(a;0;0)$ vào phương trình $(S)$:

$a^2-a.a=0$ (đúng) $\Rightarrow A' \in (S)$; $a^2-a.a=0$ (đúng) $\Rightarrow B \in (S)$.

b) Xác định tâm và bán kính của $(S)$ theo $a$.

Từ phương trình mặt cầu $(S)$ suy ra tâm $I\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{7a}{18};\dfrac{a}{2}\right)$ và bán kính $R=\sqrt{\alpha^2+b^2+c^2-d}=\dfrac{a\sqrt{211}}{18}$.

**2.3.2. Biện pháp 2:** *Rèn luyện cho học sinh khả năng nhận biết một bài toán hình học không gian bằng phương pháp tọa độ*

Trong hệ tọa độ vuông góc $Oxyz$ với cơ sở trực chuẩn $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, những bài toán hình học không gian có phần giả thiết ở những dạng sau có thể dùng phương pháp tọa độ để giải:

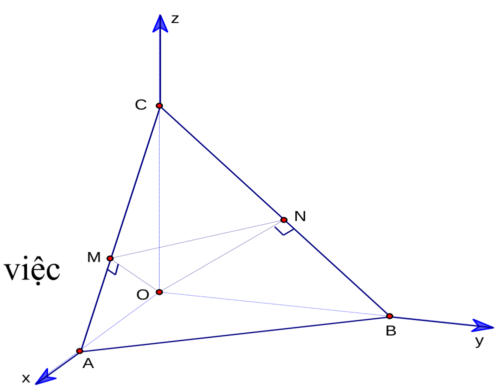
- Hình đã cho có một đỉnh là một tam diện vuông.
- Hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy và đáy là các tam giác vuông, tam giác đều, hình vuông, hình chữ nhật,…
- Hình lập phương, hình hộp chữ nhật.
- Hình đã cho có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng, trong mặt phẳng đó có những đa giác đặc biệt: tam giác vuông, tam giác đều, hình thoi,…
- Hình chóp đều: hình chóp tam giác đều, hình chóp tứ giác đều,…

**Ví dụ 2** [4, 169]: Cho tứ diện $OABC$ có $OA, OB, OC$ đôi một vuông góc, $AC = 2OB, BC = 2OA$. Vẽ $OM \perp AC$ tại $M$, $ON \perp BC$ tại $N$.

a) Chứng minh $MN \perp OC$.

b) Tính $\cos MON$.

**Giải**




Ta có: $\begin{cases} OA^2 + OC^2 = AC^2 \\ OB^2 + OC^2 = BC^2 \end{cases}$

$\Rightarrow 4OB^2 - OA^2 = 4OA^2 - OB^2 \Rightarrow OA = OB$.

Đặt $OA = OB = a \Rightarrow OC = a\sqrt{3}$.

Từ giả thiết $OA, OB, OC$ đôi một vuông góc dẫn đến việc chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như sau:

- Gốc $O$;
- Trục $Ox$ đi qua $OA$;
- Trục $Oy$ đi qua $OB$;
- Trục $Oz$ đi qua $OC$.

Khi đó: $O(0;0;0), A(a;0;0), B(0;a;0), C(0;0;a\sqrt{3})$.

a) Chứng minh $MN \perp OC$. Ta cần chứng minh: $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{OC} = 0$.

Từ giả thiết kết hợp chọn hệ trục toa độ, ta tìm được: $M\left(\frac{3a}{4};0;\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$; $N\left(0;\frac{3a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$.

Xét $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{OC} = \left(-\frac{3a}{4};\frac{3a}{4};0\right).\left(0;0;a\sqrt{3}\right) = 0$.

Vậy $MN \perp OC$.

b) Tính $\cos MON$.

Ta có: $\cos MON = \frac{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}}{OM.ON} = \frac{1}{4}$.

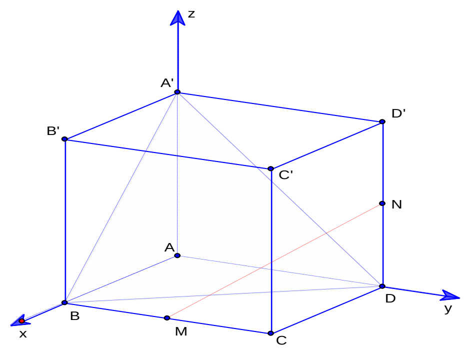
**2.3.3. Biện pháp 3:** *Rèn luyện kỹ năng thiết lập hệ trục tọa độ đối với mỗi loại hình và cho học sinh giải bài toán hình học không gian bằng nhiều cách với việc chọn hệ trục tọa độ khác nhau*

Đưa ra cách chọn hệ trục tọa độ đối với mỗi loại hình (chủ yếu là những hình thường gặp).

**Ví dụ 3** [4, 162]: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng $a$. Gọi $M,N$ lần lượt là trung điểm cạnh $BC, DD'$. Chứng minh rằng: $MN // (A'BD)$.

Theo giả thiết bài toán: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng $a$ nên ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như sau:

**Cách 1:** Chọn hệ trục tọa độ như sau:




- Gốc $O \equiv A$;
- Trục $Ox$ đi qua $AB$;
- Trục $Oy$ đi qua $AD$;
- Trục $Oz$ đi qua $AA'$.

Khi đó: $A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;a;0), A'(0;0;a)$

Phương trình $(A'BD)$ có dạng:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1 \Leftrightarrow x+y+z-a=0.$$

Suy ra vectơ pháp tuyến của $(A'BD)$ là $\vec{n}=(1;1;1)$.

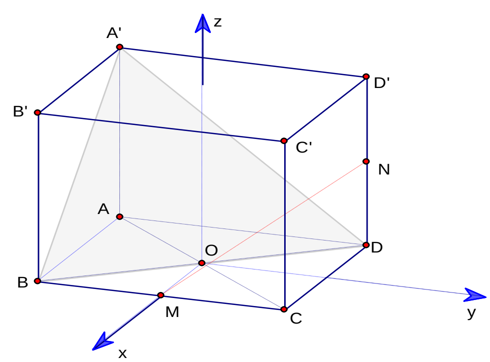
$M$ là trung điểm $BC \Rightarrow M\left(a;\frac{a}{2};0\right)$; $N$ là trung điểm $DD' \Rightarrow N\left(0;a;\frac{a}{2}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{MN}=\left(-a;\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$.

Ta có: $\vec{n}.\overrightarrow{MN}=0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{MN}$.

Vậy $MN // (A'BD)$.

**Cách 2:** Chọn hệ trục tọa độ như sau:




Gốc $O$, với $O = AC \cap BD$;

Tia $Ox$ đi qua $O$, song song với $AB$;

Tia $Oy$ đi qua $O$, song song với $AD$;

Tia $Oz$ đi qua $O$, song song với $AA'$.

Khi đó:

$$O(0;0;0), M\left(\frac{a}{2};0;0\right), A\left(-\frac{a}{2};-\frac{a}{2};0\right), C\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right),$$

$$B\left(\frac{a}{2};-\frac{a}{2};0\right), D\left(-\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right), A'\left(-\frac{a}{2};-\frac{a}{2};a\right), D'\left(-\frac{a}{2};\frac{a}{2};a\right).$$

Ta có: $N$ là trung điểm $DD' \Rightarrow N\left(-\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$.

Tiếp tục, tính $\overrightarrow{MN}=\left(-a;\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$ và vectơ pháp tuyến của $\left(A'BD\right)$ là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'D}\right]=a^2\left(1;1;1\right)$.

Suy ra $\vec{n}.\overrightarrow{MN}=0\Rightarrow\vec{n}\perp\overrightarrow{MN}$.

Vậy $MN\,//\left(A'BD\right)$.

### 2.3.4. Biện pháp 4: *Rèn luyện năng lực chuyển đổi ngôn ngữ trong quá trình giải toán hình học không gian*

Việc chuyển đổi ngôn ngữ trong quá trình giải toán hình học không gian là rất quan trọng. Vì vậy, chúng ta cần rèn luyện cho học sinh năng lực chuyển đổi ngôn ngữ, cụ thể là từ ngôn ngữ hình học sang ngôn ngữ tọa độ, đại số.

Một vài ví dụ về cách chuyển từ ngôn ngữ hình học sang ngôn ngữ tọa độ:

- Ba điểm phân biệt $A,B,C$ thẳng hàng tương đương tọa độ một điểm thỏa phương trình đường thẳng đi qua hai điểm kia, hoặc $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.
- Bốn điểm phân biệt $A,B,C,D$ đồng phẳng tương đương tọa độ một điểm thỏa phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm kia, hoặc $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=0$.

Thiết lập bảng chuyển đổi từ ngôn ngữ hình học sang ngôn ngữ tọa độ:

+ Chuyển đổi khái niệm;
+ Chuyển đổi các mối quan hệ.

### 2.3.5. Biện pháp 5: *Cho nhiều bài tập hình học không gian giải bằng phương pháp tọa độ, hệ thống hóa theo dạng với mức độ từ dễ đến khó*

Đưa ra hệ thống bài tập theo dạng với mức độ từ dễ đến khó:

+ Dạng toán chứng minh quan hệ song song và vuông góc.
+ Dạng toán tính toán: tính khoảng cách, tính góc.
+ Dạng toán tính diện tích, thể tích.

## 3. Kết luận

Trên đây là một số biện pháp tôi đưa ra với mong muốn bồi dưỡng năng lực vận dụng phương pháp tọa độ cho học sinh trong việc giải toán hình học không gian. Bên cạnh đó là làm sáng tỏ sự cần thiết của việc giải toán hình học không gian bằng phương pháp tọa độ. Hy vọng những biện pháp nêu trên bước đầu giúp học sinh làm quen và tiến tới nâng cao, bồi dưỡng năng lực giải toán hình học không gian bằng phương pháp tọa độ; giúp học sinh hứng thú với môn hình học đặc biệt các bài toán về hình học không gian.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO


1. V. N. Cương (Chủ biên) P. K. Ban, L. H. Hùng, T. Mân, *Bài tập Hình học 12 nâng cao*, NXB Giáo dục.
2. Đ. Quỳnh (Tổng chủ biên), V. N. Cương (Chủ biên), P. K. Ban, L. H. Hùng, T. Mân, *Sách giáo khoa Hình học 12 nâng cao*, NXB Giáo dục.
3. L. X. Trường (2013), *Bồi dưỡng năng lực giải toán cho sinh viên ngành sư phạm toán trình độ cao đẳng qua dạy học môn số học*, Báo cáo và tổng kết đề tài khoa học và công nghệ cấp cơ sở, Trường Đại học Đồng Tháp.

4. V. T. Văn (Chủ biên), L. H. Dương, N. N. Giang, *Chuyên đề ứng dụng tọa độ trong giải toán hình học không gian*, NXB Đại học sư phạm.