MỞ RỘNG ĐỊNH LÍ TỰA CO KIỂU SUZUKI TRÊN KHÔNG GIAN MÊTRIC

Hồ Quốc Ái
ĐHSTOAN11, Khoa Sư phạm Toán-Tin, Trường Đại học Đồng Tháp
Email: hoquocaidt@gmail.com

Tóm tắt. *Trong bài viết này, chúng tôi thiết lập và chứng minh định lí điểm bất động là mở rộng của định lí tựa co kiểu Suzuki trên không gian mêtric bằng việc thêm bốn giá trị mới vào điều kiện co.*

1 Mở đầu

Với nhiều định lí điểm bất động trên không gian mêtric, chúng ta thấy rằng điều kiện co thường chứa tối đa năm giá trị là $d(x,y), d(Tx,x), d(Ty,y), d(y,Tx), d(x,Ty)$. Gần đây, P. Kumam và cộng sự [3] đã bổ sung thêm bốn giá trị mới $d(T^2x,x), d(T^2x,Tx)$, $d(T^2x,y), d(T^2x,Ty)$ vào điều kiện co và chứng minh định lí điểm bất động đối với điều kiện co mới này.

Bằng cách tương tự, chúng tôi đặt vấn đề mở rộng những kết quả trong bài báo [4] đối với không gian mêtric bằng việc thêm bốn giá trị mới $d(x,T^2x), d(Tx,T^2x)$, $d(y,T^2x), d(Ty,T^2x)$ vào điều kiện co.

Chúng tôi giới thiệu một số khái niệm sử dụng trong bài viết này.

1.1 Định nghĩa ([2], Định nghĩa 1.1)**.** Giả sử X là một tập khác rỗng cho trước. Ta gọi hàm số $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ là một *mêtric* (hay *khoảng cách*) trên X nếu hàm số này thỏa mãn các điều kiện sau.

(1) $d(x,y) \geq 0$, với mọi $x,y \in X$, $d(x,y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$,

(2) $d(x,y) = d(y,x)$ với mọi $x,y \in X$,

(3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ với mọi $x,y,z \in X$.

Khi đó, (X,d) được gọi là một *không gian mêtric*.

1.2 Định nghĩa ([2], Định nghĩa 1.5.1)**.** Cho (X,d) là một không gian mêtric và $\{x_n\}$ là một dãy trong X. Khi đó dãy $\{x_n\}$ được gọi là *hội tụ* đến $x \in X$, viết là $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$.

1.3 Tính chất ([2], Tính chất 1.5.2)**.** Cho (X,d) là một không gian mêtric. Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ thì giới hạn đó là duy nhất.

Chứng minh. Giả sử dãy $\{x_n\}$ hội tụ về x và y trong X. Khi đó với mọi n ta có

$$d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y).$$

Cho $n \to \infty$ ta được $d(x,y) = 0$ hay $x = y$. □

1.4 Định nghĩa ([2], Định nghĩa 4.1.1)**.** Cho (X,d) là một không gian mêtric và $\{x_n\}$ là một dãy trong X. Khi đó

(1) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là một *dãy Cauchy* nếu $\lim\limits_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$.

(2) Không gian (X, d) được gọi là *đầy đủ* nếu mỗi dãy Cauchy trong (X, d) là một dãy hội tụ.

1.5 Định nghĩa ([4], trang 2)**.** Cho (X, d) là một không gian mêtric. Lấy $x_0 \in X$ và các ánh xạ $T : X \to X$, $P : X \to 2^X$ ($2^X = \{A \subset X : A \neq \emptyset\}$). Khi đó

(1) $O(T, x_0) = \{x_n : x_n = T^n x_0, n = 1, 2, ...\}$ là một *quỹ đạo* của $T : X \to X$;

(2) Một không gian X là T*-quỹ đạo đầy đủ* nếu và chỉ nếu mọi dãy Cauchy trong quỹ đạo $O(T, x_0)$ hội tụ trong X;

(3) $P(T, x_0) = \{x_n : x_n \in Px_{n-1}, n = 1, 2, ...\}$ là một *quỹ đạo* của $P : X \to 2^X$.

(4) X được gọi là P*-quỹ đạo đầy đủ* nếu mỗi dãy Cauchy của $\{x_n : x_n \in Px_{n-1}, n = 1, 2, ...\}$ hội tụ trong X.

2 Kết quả chính

Trong bài viết này, ta xét các điều kiện co sau đây cho ánh xạ T trên không gian mêtric (X, d) với mỗi $x, y \in X$:

$$\begin{aligned} d(x,Tx) + d(y,Ty) &\leq \delta[d(x,T^2x) + d(Tx,T^2x) + d(y,T^2x) + d(Ty,T^2x)] \\ &\quad + a_\delta d(x,y) \qquad (2.1) \end{aligned}$$

với $\delta \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right), a_\delta \in (1-\delta, 2-4\delta)$,

$$\begin{aligned} d(x,Tx) + d(y,Ty) &\leq \varepsilon[d(Tx,T^2x) + d(y,T^2x) + d(Ty,T^2x)] \\ &\quad + b_\varepsilon[d(x,Ty) + d(y,Tx) + d(x,y)] \qquad (2.2) \end{aligned}$$

với $\varepsilon \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right), b_\varepsilon \in \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2-2\varepsilon}{3}\right)$,

$$\begin{aligned} d(x,Tx) + d(y,Ty) + d(Tx,Ty) &\leq \alpha[d(x,T^2x) + d(Tx,T^2x) \\ &\quad + d(y,T^2x) + d(Ty,T^2x)] \\ &\quad + c_\alpha[d(x,Ty) + d(y,Tx)] \qquad (2.3) \end{aligned}$$

với $\alpha \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right), c_\alpha \in \left(1-\alpha, \dfrac{3-4\alpha}{2}\right)$,

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &\leq k \max\Big\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2}, \\ &\quad d(y,T^2x), d(Ty,T^2x)\Big\} \qquad (2.4) \end{aligned}$$

với $k \in (0, 1)$.
Ta đặt

$$\eta = \min\left\{\frac{1-\delta}{2\delta + a_\delta}, \frac{1-b_\varepsilon-\varepsilon}{3b_\varepsilon + 2\varepsilon}, \frac{2-c_\alpha-\alpha}{2c_\alpha+2\alpha-1}, \frac{1}{k+1}\right\}. \qquad (2.5)$$

Khi đó $0 < \eta < 1$.

2.1 Định lí. *Cho $T : X \to X$ là một ánh xạ trên không gian mêtric (X, d) và X là T-quỹ đạo đầy đủ. Giả sử tồn tại $x_0 \in X$ sao cho với mỗi hai phần tử $x, y \in \overline{O(T, x_0)}$,*

$$\eta d(x, Tx) \leq d(x, y) \tag{2.6}$$

kéo theo một trong các điều kiện (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) là đúng. Khi đó, dãy $\{T^n x_0\}$ hội tụ trong X và $z = \lim_{n\to\infty} T^n x_0$ là điểm bất động của T.

Chứng minh. Ta có $\eta d(x_n, x_{n+1}) < d(x_n, x_{n+1})$. Suy ra một trong các điều kiện (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) là đúng.

Đặt $d_n = d(x_n, x_{n+1})$, với $x_n = T^n x_0, n \in \mathbb{N}$. Trong (2.1), thay x bởi x_n và y bởi x_{n+1}, ta được

$$\begin{aligned} d(x_n, Tx_n) + d(x_{n+1}, Tx_{n+1}) &\leq \delta[d(x_n, T^2x_n) + d(Tx_n, T^2x_n) + d(x_{n+1}, T^2x_n) \\ &\quad + d(Tx_{n+1}, T^2x_n)] + a\delta d(x_n, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) &\leq \delta[d(x_n, x_{n+2}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) \\ &\quad + d(x_{n+2}, x_{n+2})] + a\delta d(x_n, x_{n+1}) \\ &= \delta[d(x_n, x_{n+2}) + 2d(x_{n+1}, x_{n+2})] + a\delta d(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq \delta[d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) \\ &\quad + 2d(x_{n+1}, x_{n+2})] + a\delta d(x_n, x_{n+1}) \\ &= (\delta + a_\delta) d(x_n, x_{n+1}) + 3\delta d(x_{n+1}, x_{n+2}). \end{aligned}$$

Tức là

$$d_n + d_{n+1} \leq (\delta + a_\delta) d_n + 3\delta d_{n+1}.$$

Suy ra

$$d_{n+1} \leq \frac{a_\delta + \delta - 1}{1 - 3\delta} d_n. \tag{2.7}$$

Trong (2.2), thay x bởi x_n và y bởi x_{n+1}, ta được

$$\begin{aligned} d(x_n, Tx_n) + d(x_{n+1}, Tx_{n+1}) &\leq \varepsilon[d(Tx_n, T^2x_n) + d(x_{n+1}, T^2x_n) + d(Tx_{n+1}, T^2x_n)] \\ &\quad + b_\varepsilon[d(x_n, Tx_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx_n) + d(x_n, x_{n+1})]. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) &\leq \varepsilon[d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_{n+2})] \\ &\quad + b_\varepsilon[d(x_n, x_{n+2}) + d(x_{n+1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1})] \\ &= 2\varepsilon d(x_{n+1}, x_{n+2}) + b_\varepsilon[d(x_n, x_{n+2}) + d(x_n, x_{n+1})] \\ &\leq b_\varepsilon[d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_n, x_{n+1})] \\ &\quad + 2\varepsilon d(x_{n+1}, x_{n+2}) \\ &= 2b_\varepsilon d(x_n, x_{n+1}) + (b_\varepsilon + 2\varepsilon) d(x_{n+1}, x_{n+2}). \end{aligned}$$

Tức là

$$d_n + d_{n+1} \leq 2b_\varepsilon d_n + (b_\varepsilon + 2\varepsilon) d_{n+1}.$$

Suy ra

$$d_{n+1} \leq \frac{2b_\varepsilon - 1}{1 - b\varepsilon - 2\varepsilon} d_n \tag{2.8}$$

Trong (2.3), thay x bởi x_n và y bởi x_{n+1}, ta được

$$\begin{aligned} & d(x_n, Tx_n) + d(x_{n+1}, Tx_{n+1}) + d(Tx_n, Tx_{n+1}) \\ & \quad \leq \alpha[d(x_n, T^2x_n) + d(Tx_n, T^2x_n) + d(x_{n+1}, T^2x_n) + d(Tx_{n+1}, T^2x_n)] \\ & \qquad + c_\alpha[d(x_n, Tx_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx_n)]. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} & d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) \\ & \quad = \alpha[d(x_n, x_{n+2}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_{n+2})] \\ & \qquad + c_\alpha[d(x_n, x_{n+2}) + d(x_{n+1}, x_{n+1})]. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} & d(x_n, x_{n+1}) + 2d(x_{n+1}, x_{n+2}) \\ & \quad = 2\alpha d(x_{n+1}, x_{n+2}) + (\alpha + c_\alpha) d(x_n, x_{n+2}) \\ & \quad \leq (\alpha + c_\alpha)[d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})] + 2\alpha d(x_{n+1}, x_{n+2}) \\ & \quad = (\alpha + c_\alpha) d(x_n, x_{n+1}) + (3\alpha + c_\alpha) d(x_{n+1}, x_{n+2}). \end{aligned}$$

Tức là

$$d_n + 2d_{n+1} \leq (\alpha + c_\alpha) d_n + (3\alpha + c_\alpha) d_{n+1}.$$

Suy ra

$$d_{n+1} \leq \frac{c_\alpha + \alpha - 1}{2 - c_\alpha - 3\alpha} d_n \tag{2.9}$$

Tiếp theo, trong (2.4), thay x bởi x_n và y bởi x_{n+1}, ta được

$$\begin{aligned} d(Tx_n, Tx_{n+1}) \leq\ & k \max \Big\{ d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, Tx_n), d(x_{n+1}, Tx_{n+1}), d(x_{n+1}, T^2x_n), \\ & \frac{d(x_n, Tx_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx_n)}{2}, d(Tx_{n+1}, T^2x_n) \Big\}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+2}) & \leq k \max \Big\{ d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n+1}, x_{n+2}), d(x_{n+1}, x_{n+2}), \\ & \qquad \frac{d(x_n, x_{n+2}) + d(x_{n+1}, x_{n+1})}{2}, d(x_{n+2}, x_{n+2}) \Big\} \\ & = k \max \Big\{ d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n+1}, x_{n+2}), \frac{d(x_n, x_{n+2})}{2} \Big\} \\ & \leq k \max \Big\{ d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n+1}, x_{n+2}), \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2} \Big\} \\ & = k \max\{ d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n+1}, x_{n+2}) \}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$d_{n+1} \leq k d_n. \tag{2.10}$$

Từ (2.7), (2.8),(2.9) và (2.10), ta được

$$d_{n+1} \leq \lambda d_n \tag{2.11}$$

với

$$\lambda = \max\left\{\frac{a_\delta + \delta - 1}{1 - 3\delta}; \frac{2b_\varepsilon - 1}{1 - b_\varepsilon - 2\varepsilon}; \frac{c_\alpha + \alpha - 1}{2 - c_\alpha - 3\alpha}; k\right\}$$

Suy ra

$$d_n \leq \lambda d_{n-1} \leq \lambda^2 d_{n-2} \leq ... \leq \lambda^n d_0 \tag{2.12}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Ta có

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... \\ &\quad + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &= d_n + d_{n+1} + ... + d_{n+p-1} \end{aligned} \tag{2.13}$$

Tử (2.12) và (2.13), ta có

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq \lambda^n d_0 + \lambda^{n+1} d_0 + ... + \lambda^{n+p-1} d_0 \\ &= \lambda^n d_0 (1 + \lambda + ...\lambda^{p-1}) \\ &= \lambda^n d_0 \frac{1 - \lambda^p}{1 - \lambda} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Trong (2.14) , cho $n \to \infty$, và chú ý rằng $\lambda \in (0, 1)$, ta được $d(x_n, x_{n+p}) \to 0$. Suy ra $\{x_n\}$ là dãy Cauchy. Từ tính chất $T-$quỹ đạo đầy đủ của X, tồn tại $z = \lim_{n\to\infty} x_n \in X$.

Giả sử với mọi $m \in \mathbb{N}$, và $x \neq z$ ta có $\eta d(x_n, Tx_n) > d(x_n, x)$ với mọi $m \geq n$. Cho $n \to \infty$, ta được $d(z, x) \leq 0$. Suy ra $z = x$. Điều này là mâu thuẫn.

Vậy tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ và với mọi $n \geq n_0$ và $x \neq z$, sao cho

$$\eta d(x_n, Tx_n) \leq d(x_n, x). \tag{2.15}$$

Suy ra, một trong các điều kiện (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) được thỏa mãn.

Giả sử (2.1) thỏa mãn. Trong (2.1), thay x bởi x_n và y bởi x, ta được

$$\begin{aligned} d(x_n, Tx_n) + d(x, Tx) &\leq \delta[d(x_n, T^2x_n) + d(Tx_n, T^2x_n) + d(x, T^2x_n) \\ &\quad + d(Tx, T^2x_n)] + a_\delta d(x, x_n). \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) + d(x, Tx) &\leq \delta[d(x_n, x_{n+2}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x, x_{n+2}) \\ &\quad + d(Tx, x_{n+2})] + a_\delta d(x, x_n). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Trong (2.16), cho $n \to \infty$. ta được

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\leq \delta[d(x, z) + d(z, Tx)] + a_\delta d(x, z) \\ &\leq \delta[d(x, z) + d(z, x) + d(x, Tx)] + a_\delta d(x, z) \\ &= (2\delta + a_\delta) d(x, z) + \delta d(x, Tx) \end{aligned}$$

hay

$$\frac{1-\delta}{2\delta+a_\delta}d(x,Tx) \leq d(x,z). \tag{2.17}$$

Nếu lần lượt các điều kiện (2.2), (2.3), (2.4) là đúng thì bằng cách chứng minh tương tự, ta có các kết quả tương ứng sau

$$\frac{1-b_\varepsilon-\varepsilon}{3b_\varepsilon+2\varepsilon}d(x,Tx) \leq d(x,z) \tag{2.18}$$

$$\frac{2-c_\alpha-\alpha}{2c_\alpha+2\alpha-1}d(x,Tx) \leq d(x,z) \tag{2.19}$$

$$d(z,Tx) \leq k\max\{d(x,z), d(x,Tx)\}. \tag{2.20}$$

Từ (2.20), ta có

$$d(z,Tx) \leq kd(x,Tx) \tag{2.21}$$

hoặc

$$d(z,Tx) \leq kd(x,z). \tag{2.22}$$

Từ (2.22), ta được

$$d(x,Tx) \leq d(x,z) + d(z,Tx) \leq (k+1)d(x,z)$$

nghĩa là

$$\frac{1}{k+1}d(x,Tx) \leq d(x,z). \tag{2.23}$$

Từ (2.17), (2.18), (2.19), (2.21) và (2.23), ta có

$$\eta d(x,Tx) \leq d(x,z) \tag{2.24}$$

hoặc

$$d(z,Tx) \leq kd(x,Tx). \tag{2.25}$$

Trường hợp 1: (2.24) đúng. Khi đó, một trong các điều kiện (2.1), (2.2), (2.3) và (2.4) là đúng.
Khi đó, thay y bởi z và x bởi x_n trong (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), ta được

$$\begin{aligned} d(x_n,Tx_n)+d(z,Tz) &\leq \delta[d(x_n,T^2x_n)+d(Tx_n,T^2x_n)+d(z,T^2x_n)+d(Tz,T^2x_n)] \\ &\quad +a_\delta d(x_n,z), \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned} d(x_n,Tx_n)+d(z,Tz) &\leq \varepsilon[d(Tx_n,T^2x_n)+d(z,T^2x_n)+d(Tz,T^2x_n] \\ &\quad +b_\varepsilon[d(x_n,Tz)+d(z,Tx_n)+d(x_n,z)], \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned} d(x_n,Tx_n)+d(z,Tz)+d(Tx_n,Tz) &\leq \alpha[d(x_n,T^2x_n)+d(Tx_n,T^2x_n) \\ &\quad +d(z,T^2x_n)+d(Tz,T^2x_n)] \\ &\quad +c_\alpha[d(x_n,Tz)+d(z,Tx_n)], \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned} d(Tx_n, Tz) &\leq k\max\Big\{d(x_n, z), d(x_n, Tx_n), d(z, Tz), \frac{d(x_n, Tz) + d(z, Tx_n)}{2}, \\ &\quad d(z, T^2x_n), d(Tz, T^2x_n)\Big\}, \end{aligned} \tag{2.29}$$

Trong các biểu thức (2.26), (2.27), (2.28), (2.29) cho $n \to \infty$, ta được

$$d(z, Tz) \leq \delta d(z, Tz)$$

$$d(z, Tz) \leq (\varepsilon + b_\varepsilon) d(z, Tz)$$

$$d(z, Tz) \leq \frac{\alpha + c_\alpha}{2} d(z, Tz)$$

$$d(z, Tz) \leq kd(z, Tz).$$

Suy ra $d(z, Tz) = 0$ hay $z = Tz$.
Trường hợp 2: (2.25) đúng. Ta sẽ chứng minh tồn tại dãy con $\{n_j\}$ của n sao cho

$$\eta d(x_{n_j}, x_{n_j+1}) \leq d(x_{n_j}, z) \tag{2.30}$$

Thật vậy, từ (2.11), ta có

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda d(x_{n-1}, x_n) \tag{2.31}$$

Giả sử tồn tại n sao cho $\eta d(x_{n-1}, x_n) > d(x_{n-1}, z)$, và $\eta d(x, x_{n+1}) > d(x_n, z)$.

Khi đó

$$\begin{aligned} d(x_{n-1}, x_n) &\leq d(x_{n-1}, z) + d(z, x_n) \\ &< \eta d(x_{n-1}, x_n) + \eta d(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq \eta d(x_{n-1}, x_n) + \eta\lambda d(x_{n-1}, x_n) \\ &= \eta(1 + \lambda) d(x_{n-1}, x_n). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Nếu $\lambda = \dfrac{a_\delta + \delta - 1}{1 - 3\delta}$ thì

$$\eta(1 + \lambda) \leq \frac{1 - \delta}{2\delta + a_\delta} . \frac{a_\delta - 2\delta}{1 - 3\delta} \tag{2.33}$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t - 2\delta}{t + 2\delta}, t \in (1 - \delta, 2 - 4\delta)$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{4\delta}{(t + 2\delta)^2} \geq 0$ với mọi $t \in (1 - \delta, 2 - 4\delta)$.

Suy ra f tăng trên $t \in (1 - \delta, 2 - 4\delta)$. Suy ra $f(t) < f(2 - 4\delta)$. Ta có $a_\delta \in (1 - \delta, 2 - 4\delta)$. Suy ra

$$f(a_\delta) < f(2 - 4\delta) = \frac{2 - 4\delta - 2\delta}{2 - 4\delta + 2\delta} = \frac{1 - 3\delta}{1 - \delta}. \tag{2.34}$$

Từ (2.33) và (2.34), ta được

$$\eta(1 + \lambda) \leq 1. \tag{2.35}$$

Tương tự, với $\lambda \in \left\{\dfrac{2b_\varepsilon - 1}{1 - b_\varepsilon - 2\varepsilon}, \dfrac{c_\alpha + \alpha - 1}{2 - c_\alpha - 3\alpha}, k\right\}$, ta cũng có

$$\eta(1+\lambda) \leq 1. \tag{2.36}$$

Từ (2.32),(2.35) và (2.36),ta được

$$d(x_{n-1}, x_n) < d(x_{n-1}, x_n). \tag{2.37}$$

Đây là điều vô lí. Nghĩa là, với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có $\eta d(x_{n-1}, x_n) < d(x_{n-1}, z)$ hoặc $\eta d(x_n, x_{n+1}) < d(x_n, z)$.

Điều này kéo theo, với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có $\eta d(x_{2n-1}, x_{2n}) < d(x_{2n-1}, z)$ hoặc $\eta d(x_{2n}, x_{2n+1}) < d(x_{2n}, z)$.

Khi đó, tồn tại dãy con $\{n_j\}$ của n sao cho $\eta d(x_{n_j}, x_{n_j+1}) < d(x_{n_j}, z)$, hay $\eta d(x_{n_j}, Tx_{n_j}) < d(x_{n_j}, z)$, với $j \in \mathbb{N}$.

Do đó, từ giả thiết kéo theo các điều kiện (2.1)− (2.4) thỏa mãn với $x = x_{n_j}$, $y = z$ và cho $j \to \infty$, ta được $z = Tz$.

Định lí đã được chứng minh xong. □

Từ Định lí 2.1, ta có hệ quả sau.

2.2 Hệ quả ([4], Theorem 2.1)**.** *Cho $T : X \to X$ là một ánh xạ trên không gian mêtric (X, d) và X là T-quỹ đạo đầy đủ. Giả sử tồn tại $x_0 \in X$ sao cho với mỗi hai phần tử $x, y \in \overline{O(T, x_0)}$,*

$$\eta d(x, Tx) \leq d(x, y)$$

với $\eta = \min\left\{\dfrac{1}{a}, \dfrac{1-b}{3b}.\dfrac{2-c}{2c-1}, \dfrac{1}{1+k}\right\}$, kéo theo một trong các điều kiện sau là đúng.

$$d(x, Tx) + d(y, Ty) \leq ad(x, y) \tag{2.38}$$

với $1 < a < 2$,

$$d(x, Tx) + d(y, Ty) \leq b[d(x, Ty) + d(y, Tx) + d(x, y)] \tag{2.39}$$

với $\dfrac{1}{2} < b < \dfrac{2}{3}$,

$$d(x, Tx) + d(y, Ty) + d(Tx, Ty) \leq c[d(x, Ty) + d(y, Tx)] \tag{2.40}$$

với $1 < c < \dfrac{3}{2}$

$$d(Tx, Ty) \leq k \max\left\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2}\right\} \tag{2.41}$$

với $k \in (0, 1)$.

Khi đó, dãy $\{T^n x_0\}$ hội tụ trong X và $z = \lim\limits_{n\to\infty} T^n x_0$ là điểm bất động của T.

Chứng minh. Hệ quả 2.2 có được bằng cách cho $\delta = \varepsilon = \alpha = 0$ trong Định lí 2.1 □

Cuối cùng, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

2.3 Ví dụ. Cho $X = \{-2, -2, 0, 1, 2\}$ và d xác định bởi

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } x = y \\ 2 \text{ nếu } (x,y) \in \{(-2,1),(-2,2),(1,-2),(2,-2)\}, \\ 1 \text{ trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Khi đó (X, d) là không gian mêtric đầy đủ. Hơn nữa, với ánh xạ $T : X \to X$ xác định bởi $T(-2) = T(-1) = T0 = -2$, $T1 = -1$, $T2 = 0$ thì X là $T-$quỹ đạo đầy đủ. Thật vậy,

$$\begin{gathered} T(-2) = T(-1) = T0 = -2, \\ T1 = -1, T^2 1 = TT1 = T(-1) = -2; \\ T2 = 0, T^2 2 = TT2 = T0 = -2. \end{gathered}$$

Suy ra, với mọi $x_0 \in X$, ta có $T^n x_0 = -2$ với mọi $n \geq 2$. Do đó, mọi dãy Cauchy trong $\overline{O(T, x_0)}$ đều hội tụ.

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} d(0,T0) + d(2,T2) &= d(0,-2) + d(2,0) \\ &= 1 + 1 = 2 = 2d(0,2) \\ d(0,T0) + d(2,T2) &= d(0,-2) + d(2,0) = 1 + 1 = 2 \\ &= \frac{2}{3}[d(0,0) + d(2,-2) + d(0,2)] \\ &= \frac{2}{3}[d(0,T2) + d(2,T0) + d(0,2)] \\ d(0,T0) + d(2,T2) + d(T0,T2) &= d(1,-1) + d(2,0) + d(-2,0) \\ &= 1 + 1 + 1 = 3 = \frac{3}{2}[d(0,0) + d(2,-2)] \\ &= \frac{3}{2}[d(0,T2) + d(2,T0)] \\ d(T0,T2) &= d(-2,0) = 1 \\ &= \max\left\{d(0,2), d(0,-2), d(2,0), \frac{d(0,0) + d(2,-2)}{2}\right\} \\ &= \max\Big\{d(0,2), d(0,T0), d(2,T2), \\ &\qquad \frac{d(0,T2) + d(2,T0)}{2}\Big\} \end{aligned}$$

Chọn $x_0 = 2$, ta suy ra $Tx_0 = T2 = 0$, $T^2 x_0 = TT0 = T(-2) = -2$, $T^n x_0 = -2$ với mọi $n \geq 2$. Khi đó, với mọi $x \in \overline{O(T,2)}$ thì $x \in \{2, 0, -2\}$. Chọn $x = 0 \in \overline{O(T,2)}$ và $y = 2 \in \overline{O(T,2)}$. Khi đó, tất cả giả thiết của [Theorem 2.1 [4]] đều thỏa mãn nhưng cả bốn điều kiện co trong [4] không đúng khi $x = 0$ và $y = 2$.

Mặt khác, trong (2.2) cho $\varepsilon = \frac{1}{5}$ và $b_\varepsilon = \frac{31}{60}$, ta được

$$\begin{aligned} d(0,T0) + d(2,T2) &= d(0,-2) + d(2,0) = 2 \\ &< \frac{43}{20} = \frac{1}{5}[d(-2,-2) + d(2,-2) + d(0,-2)] \\ &\quad + \frac{31}{60}[d(0,0) + d(2,-2) + d(0,2)] \\ &= \frac{1}{5}[d(T0,T^2 0) + d(2,T^2 0) + d(T2,T^2 0)] \\ &\quad + \frac{31}{60}[d(0,T2) + d(2,T0) + d(0,2)]. \end{aligned}$$

Với $x = 0, y = 2, \varepsilon = \dfrac{1}{5}$ và $b_\varepsilon = \dfrac{31}{60}$ thì tất cả giả thiết của Định lí (2.1) đều thỏa mãn. Mặt khác, (2.2) đúng và $-2 = \lim\limits_{n\to\infty} T^n 2$. Hơn nữa, ta có $T(-2) = -2$ hay -2 là điểm bất động của T.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. N. V. Dung, N. T. T. Ly, V. D. Thinh, and N. T. Hieu, *Suzuki-type fixed point theorems for two maps in metric-type spaces,* J. Nonlinear Anal. Optim. 4 (2013), no. 2, 17-29.

2. N. Định và N. Hoàng, *Hàm số biến số thực*, NXB Giáo dục, 2003.

3. P. Kumam, N. V. Dung, and K. Sitthithakerngkiet, *A generalization of Ciric fixed point theorem,* Filomat (2014), accepted paper.

4. S. L. Singh, H. K. Pathak, and S. N. Mishra, *On a Suzuki type general fixed point theorem with applications,* Fixed Point Theory Appl. 2010 (2010), 1-15.